ГАЗОДИНАМИКА СВЕРХЗВУКОВЫХ НЕИЗОБАРИЧЕСКИХ СТРУЙ

ГАЗОДИНАМИКА СВЕРХЗВУКОВЫХ НЕИЗОБАРИЧЕСКИХ СТРУЙ

МАШИНОСТРОЕНИЕ

ГАЗОДИНАМИКА СВЕРХЗВУКОВЫХ НЕИЗОБАРИЧЕСКИХ СТРУЙ

Москва
«Машиностроение»
1989

УДК 532.525.2.011.5

Газодинамика сверхзвуковых неизобарических струй / В. С. Авдуевский, Э. А. Ашратов, А. В. Иванов, У. Г. Пирумов.—М.; Машиностроение, 1989.—320 с.— ISBN 5-217-00103-8.

Изложены обобщенные результаты теоретических и экспериментальных исследований газодинамической структуры неизобарических струй, истекающих в затопленное пространство и сверхзвуковой спутный поток с учетом эффектов, вносимых вязкостью, разреженностью, неравновесными физико-химическими процессами, двухфазностью и пространственностью течения.

Для научных работников, занимающихся проблемами газовой динамики в авиационной и ракетно-космической технике.

Библиогр. 74 назв. Ил. 211. Табл. 5.

Рецензент академик **Ю. А. Рыжов**

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Авдуевский Всеволод Сергеевич, Ашратов Эмид Алиевич,
Иванов Анатолий Васильевич, Пирумов Ульян Гайкович,
ГАЗОДИНАМИКА СВЕРХЗВУКОВЫХ НЕИЗОБАРИЧЕСКИХ СТРУЙ

Редактор **В. Г. Гатагогу**
Художественный редактор **В. В. Лебедев**
Переплет художника **И. К. Капраловой**
Технические редакторы **Н. М. Харитонова** и **И. Н. Раченкова**
Корректор **Л. Е.Сонюшкина**

ИБ № 5504

Сдано в набор 03.02.88. Подписано в печать 02.02.90. Т-07016.
Формат 60х88 1/16. Бумага офсетная № 2.
Гарнитура литературная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 19,60. Усл. кр.-отт. 19,60. Уч.-изд. л. 21,24.
Тираж 1 700 экз. Заказ № 632-Д. Цена 4 р. 60 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство "Машиностроение", 107076, Москва, Стромынский пер., 4.

Отпечатано с диапозитивов, изготовленных в гипографии им. Дунаева, в Московской типографии № 8 Государственного комитета СССР по печати, 101898, Москва, Хохловский пер., 7. Тип. заказ № 92.

$Г\frac{2705140400 - 405}{038(01) - 89}$ КБ 13—87—89

ISBN 5-217-00103-8

ПРЕДИСЛОВИЕ

Для решения практических задач авиационной и космической техники необходимо проведение интенсивных исследований сверхзвуковых неизобарических струй газа, истекающих как в затопленное пространство, так и в сверхзвуковой спутный поток. Вопросы, связанные с таким истечением, важны в связи с тепловым и силовым воздействиями струй на элементы конструкций, формированием газовой оболочки вокруг летательного аппарата (ЛА), образованием оптических и радиолокационных помех на линиях связи, а также рядом других явлений.

В монографии изложены результаты исследования истечения неизобарических струй в затопленное пространство и спутный сверхзвуковой поток при турбулентном, ламинарном и разреженном режимах течения, с единых позиций обобщен большой фактический материал, появившийся в последние годы в отечественной и зарубежной литературе.

Описаны определяющие параметры и сформулированы условия подобия течения в струях, позволяющие выявить корреляционные зависимости для основных геометрических характеристик струй, их ударно-волновой структуры и распределений газодинамических параметров в различных зонах. Проведен анализ явления вязкого взаимодействия. Рассмотрены эффекты, связанные с неравновесными физико-химическими процессами и наличием конденсированной фазы. Изложены результаты исследований характеристик неизобарических струй, истекающих из кольцевых сопл и систем сопл.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

a — скорость звука
$\mathbf{W}$ — вектор скорости
W — модуль скорости
u, v, w — проекция вектора скорости на оси декартовой системы координат
θ — угол наклона вектора скорости к оси x
p — давление
ϱ — плотность
T — температура
h — энтальпия
H — полная энтальпия
S — энтропия
e — внутренняя энергия
$e_{\text{т}}$ — энергия турбулентности
M° — молекулярная масса
R° — универсальная газовая постоянная
c_p, c_v — теплоемкости при постоянном давлении и объеме соответственно
c_i — массовая концентрация i-го химического компонента
π — касательные составляющие тензора напряжения
q — тепловой поток
μ — коэффициент динамической вязкости
$\nu=\mu/\varrho$ — коэффициент кинематической вязкости
λ — коэффициент теплопроводности
m — отношение скорости газа на внешней и внутренней границах слоя смешения
$\gamma=c_p/c_v$ — отношение удельных теплоемкостей
$n=p_a/p_{\infty}$ — степень нерасчетности
M — число Маха
Re — число Рейнольдса
Pr — число Прандтля
Sc — число Шмидта
Le — число Льюиса

Нижние индексы

i — химический компонент, параметры на внутренней границе слоя смешения
p — частицы
∞ — окружающая среда
a — выходной срез сопла
0 — параметры торможения
$*$ — параметры в точке, где скорость потока равна скорости звука
e — параметры на внешней границе слоя смешения
т — турбулентное течение

1. ОСНОВНЫЕ ОСОБЕННОСТИ СТРУКТУРЫ НЕИЗОБАРИЧЕСКИХ СТРУЙ. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

1.1. КАЧЕСТВЕННАЯ КАРТИНА ТЕЧЕНИЯ

Неизобарические струи образуются при истечении газа из сопла на нерасчетном режиме, т. е. когда давление p_a на срезе сопла отличается от давления p_∞ в окружающей среде. Нерасчетность истечения характеризуют степенью нерасчетности $n=p_a/p_\infty$. При перерасширении потока газа на срезе сопла ($n<1$) струя называется *перерасширенной*, а при недорасширении ($n>1$) — *недорасширенной*. Отличают случаи истечения в газовую среду, находящуюся в покое относительно сопла (затопленное пространство), а также в спутный и встречный потоки.

В отличие от изобарических струй, для которых основным процессом является вязкое перемешивание, в неизобарических струях из-за нерасчетности истечения газ имеет бо́льшую скорость в радиальном направлении, что, в свою очередь, приводит к сложному течению с областями расширения и сжатия, а также с ударными волнами сложной конфигурации. При этом радиальная компонента скорости газа вблизи границы струи оказывается переменной по длине струи и может несколько раз менять свое направление, пока под воздействием эффектов диссипации не станет пренебрежимо малой. Такая особенность приводит к тому, что на некотором расстоянии от среза сопла граница струи может образовывать последовательность характерных бочкообразных и приближенно подобных структур, очертания которых, однако, постепенно размываются под воздействием эффектов вязкости, теплопроводности и диффузии, протекающих в нарастающем вдоль границы струи слое смешения, а также под воздействием волновых потерь.

Наблюдаемое число таких структур зависит от условий течения и в общем случае оказывается тем меньше, чем сильнее проявляются диссипативные процессы. Так, например, при очень больших степенях нерасчетности истечения ($n>100$) зачастую наблюдается лишь одна «бочка».

Бочкообразная форма границы неизобарической струи обусловливает возникновение ударных волн сходной конфигурации, а отражение последних от оси может приводить к образованию конфигураций с прямыми замыкающими ударными волнами.

Для удобства и наглядности описания картины течения неизобарическую струю условно разделяют на начальный, переходный и основной участки.

В качестве начального участка обычно принимается прилегающая к соплу первая бочка струи, в которой имеет место наибольшая неравномерность в распределении газодинамических параметров как в продольном, так и в поперечном направлениях. За исключением случая очень низких чисел Рейнольдса, при которых проявляются эффекты разреженности, в начальном участке струи волновые процессы обычно превалируют над процессами вязкого перемешивания, происходящими только в развивающемся вдоль границы струи слое смешения.

На больших расстояниях от среза сопла (в основном участке) волновые процессы ослабевают, давление в струе выравнивается и течение приобретает изобарический характер (аналогичный течению в основном участке расчетной струи ($n=1$)).

Между начальным и основным участками располагается переходный участок со слабой неизобаричностью ($0{,}5<n<3$). Неравномерность в распределении параметров здесь значительно меньше, чем в начальном участке, а ударные волны имеют малую интенсивность. Если условия течения таковы, что толщина слоя смешения в конце начального участка оказывается уже сравнимой с поперечными размерами струи, то определяющим процессом в переходном участке является процесс вязкого перемешивания. В таком случае влияние неизобаричности в переходном участке становится незначительным, так что можно полагать, что после начального участка вязкое перемешивание протекает почти так же, как и в изобарической струе.

Таким образом, влияние неизобаричности проявляется в основном в начальном участке нерасчетной струи, поэтому главное внимание будет уделено течению в этом участке.

Возможность реализации качественно различных структур неизобарических струй, о которых говорилось ранее, иллюстрируется представленными на рис. 1.1 ...1.3 фотографиями визуализации истечения для некоторых режимов.

На рис. 1.1 представлены фотографии, соответствующие истечению турбулентной воздушной струи из сопла с числом $M_a=3$ в затопленное воздушное пространство на режиме перерасширения, полученные теневым методом при подсветке от постоянного (см. рис. 1.1, *а*) и искрового (см. рис. 1.1, *б*) источников света. Первая фотография позволяет видеть «многобочечную» структуру струи, тогда как вторая — судить о наличии опоясывающего эту струю турбулентного слоя смешения.

Аналогичным образом получены фотографии рис. 1.2 для турбулентной воздушной струи, истекающей в затопленное воздухом пространство из сильно недорасширенного сопла с числом $M_a=3$ при степени нерасчетности $n=16$. Можно видеть, что здесь

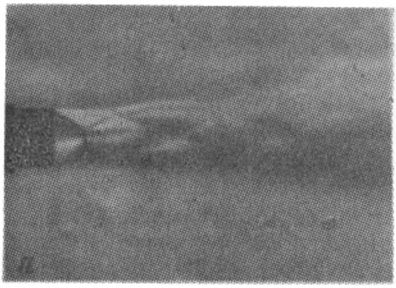
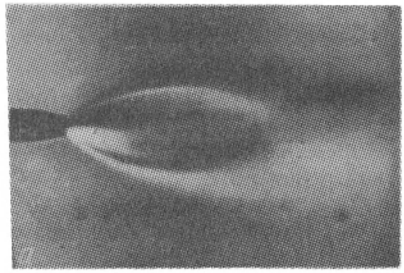


Рис. 1.1. Турбулентная перерасширенная струя, истекающая в затопленное пространство ($M_a=3$, $n=0,5$):

а — время экспозиции 10^{-2}с; *б* — время экспозиции 10^{-6}с



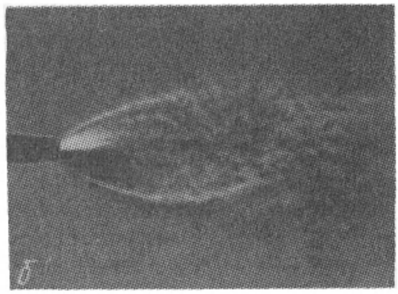


Рис. 1.2. Турбулентная недорасширенная струя, истекающая в затопленное пространство ($M_a=3$, $n=16$):

а — время экспозиции 10^{-2}с, *б* — время экспозиции 10^{-6}с

только первая бочка имеет четкую волновую структуру, структура второй бочки уже сильно размыта эффектами турбулентного перемешивания.

На рис. 1.3 приведена фотография визуализации истечения ламинарной струи CO_2 большой степени нерасчетности ($n=530$) в спутный сверхзвуковой поток воздуха с числом $M_\infty=5,9$. Здесь $M_a=2,8$, а визуализация проведена путем возбуждения флуоресценции газа пучком быстрых электронов, сканирующим вдоль

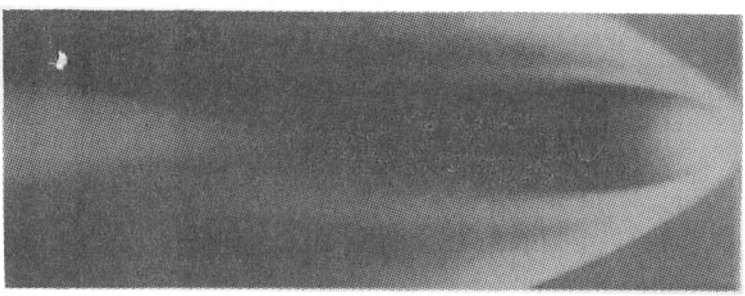


Рис. 1.3. Ламинарная недорасширенная струя CO_2, истекающая в спутный сверхзвуковой поток воздуха ($M_a=2,8$; $M=5,9$; $n=530$)

меридионального сечения струи. Эта фотография дает представление о волновой структуре сильно недорасширенной струи в спутном потоке. Здесь также наблюдается только первая бочка.

Рассмотрим более подробно качественную картину течения в начальном участке неизобарической сверхзвуковой струи.

Анализ размерностей приводит к следующей системе критериев подобия:

$n=p_a/p_\infty$ — степень нерасчетности истечения;

$M_a=W_a/a_a$ — число Маха на срезе сопла;

$\gamma_a=(c_p/c_v)_a$ — отношение удельных теплоемкостей для газа струи;

θ_a — угол наклона контура сопла в выходном сечении;

$M_\infty=W_\infty/a_\infty$ — число Маха спутного потока;

$\gamma_\infty=(c_p/c_v)_\infty$ — отношение удельных теплоемкостей для газа спутного потока.

Здесь W и a — соответственно скорость потока и скорость звука; c_p и c_v — удельные теплоемкости при постоянном давлении и объеме. Эта совокупность параметров определяет течение на начальном участке сверхзвуковой неизобарической струи в приближении идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа.

Как будет показано в дальнейшем, существуют условия течения, когда толщина δ слоя смешения в пределах начального участка оказывается малой по сравнению с поперечными размерами струи. Такие условия осуществляются при ламинарном режиме течения в слое смешения и достаточно больших местных числах Рейнольдса, а также при турбулентном режиме течения для значения параметра спутности $m=1$ (m — отношение скорости спутного потока к скорости струи). При этом в первом приближении можно пренебречь влиянием вязкости и описывать течение на начальном участке с использованием модели идеального газа.

Модель идеального газа сыграла значительную роль в изучении структуры течения в начальном участке неизобарических струй. В рамках этой модели проведены систематические расчеты, позволившие выявить влияние параметров n, M_a, M_∞, γ_a, γ_∞ и θ_a на картину точения, составить таблицы струй идеального газа [52]. Поэтому рассмотрение особенностей течения в неизобарических струях в разд. 2 и 3 начинается с обсуждения результатов, полученных для модели идеального газа.

В дополнение к перечисленным критериям учет вязких эффектов в неизобарической струе приводит к следующим критериям подобия: $Re_a=\varrho_a W_a r_a/\mu_a$ — число Рейнольдса, вычисленное по параметрам на срезе сопла и его радиусу r_a (μ_a — коэффициент вязкости газа при температуре T_a); $Re_\infty=\varrho_\infty W_\infty r_a/\mu_\infty$ — число Рейнольдса, вычисленное по параметрам в невозмущенном спутном потоке (μ_∞ — коэффициент вязкости газа спутного потока при температуре T_∞); $m=W_\infty/W_a$ — параметр спутности; $\mathrm{Pr}_a=\mu_a c_{pa}/\lambda_\infty$ и $\mathrm{Pr}_\infty=\mu_\infty c_{p\infty}/\mu_\infty$ — числа Прандтля для газа струи и спутного потока (c_p — удельная теплоемкость при $p=\mathrm{const}$, λ — коэффициент теплопроводности); $\mathrm{Sc}_a=\mu_a/(\varrho_a D)$ и $\mathrm{Sc}_\infty=\mu_\infty/(\varrho_\infty D)$ — числа Шмидта для газа струи и газа спутного потока (D — коэффициент диффузии).

В зависимости от условий течения коэффициенты μ, λ и D будут соответствовать своим молекулярным значениям или их турбулентным аналогам.

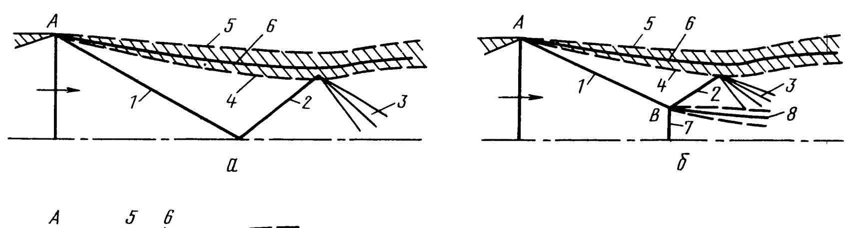
Другие безразмерные параметры — ϱ_∞/ϱ_a, T_∞/T_a, H_∞/H_a (H — полная энтальпия) являются производными от указанной совокупности параметров.

Кратко опишем волновую структуру течения в начальном участке осесимметричной неизобарической струи.

В перерасширенной струе (рис. 1.4) повышение давления на кромке сопла от p_a до p_∞ происходит в скачке уплотнения *1*, обычно называемом *падающим скачком*. В области перед этим скачком течение является естественным продолжением течения в сопле.

В зависимости от величины степени нерасчетности возможны три характерных режима течения. При значениях $n_1 \leqslant n \leqslant 1$ отражение падающего скачка от оси симметрии происходит регулярным образом (см. рис. 1.4, *а*). Для примера $n_1 \approx 0{,}55$ при $M_a=3$, $\gamma_a=1{,}4$ и $\theta_a=0$. Величина n_1 растет с уменьшением M_a и ростом θ_a.

При $n<n_1$ отражение падающего скачка становится нерегулярным (см. рис. 1.4, *б*) с образованием центрального скачка (*диска Маха*), за которым течение становится дозвуковым. Из точки *B*, которую принято называть *тройной точкой*, выходит линия тока *8* (в идеальном газе линия тангенциальности разрыва), разделяющая течения за отраженным и центральным скачками. В реальном газе вдоль линии *8* образуется зона смешения. При взаимодействии отраженного скачка *2* с областью постоянного давления образуется волна разрежения *3* и формируется новая «бочка» струи.



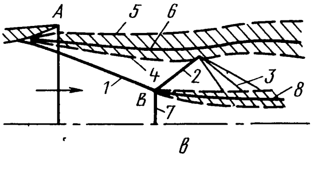


Рис. 1.4. Схемы течения в перерасширенной затопленной струе:

1 — падающий скачок, *2* — отраженный скачок, *3* — волна разрежения; *4* — внутренняя граница слоя смешения; *5* — внешняя граница слоя смешения; *6* — условная граница струи; *7* — центральный скачок; *8* — разделяющая линия тока

При значениях $n<n_*$ из-за отрыва пограничного слоя на стенке сопла падающий скачок перемещается внутрь сопла (см. рис. 1.4, *в*). Величина n_* для турбулентного пограничного слоя равна 0,35 при $M_a=3$.

В недорасширенной струе (рис. 1.5) на кромке сопла происходит расширение газа в центрированной волне разрежения *9*. Далее вниз по потоку внутри струи зарождается так называемый висячий скачок уплотнения *1*. Образование этого скачка можно объяснить следующим образом. Условие постоянства давления вдоль границы расширяющейся сверхзвуковой струи приводит к искривлению границы и образованию волн сжатия, идущих внутрь струи. Пересечение волн сжатия формирует висячий скачок, имеющий бочкообразную форму.

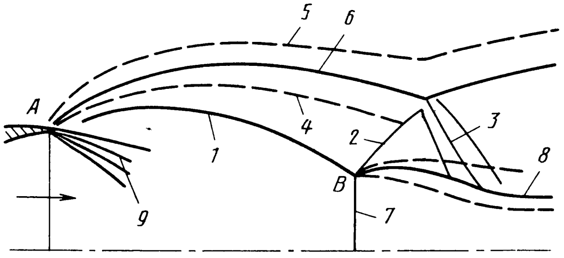


Рис. 1.5. Схема течения в недорасширенной затопленной струе:

1 — висячий скачок, *9* — центрированная волна разрежения (остальные обозначения, как на рис. 1.4)

В недорасширенной затопленной струе отражение висячего скачка от оси струи обычно происходит с образованием центрального скачка. Лишь при слабом недорасширении (например, при $n<3$ для $M_a=3$, $\theta_a=0$) возможно регулярное отражение.

Предельный случай недорасширенной струи — истечение в вакуум. В этом случае в струе не возникают ударные волны. В рамках модели идеального газа на кромке сопла происходит разворот потока газа на предельно возможный при заданных M_a и γ_a угол $\theta_{пр}$ (рис. 1.6).

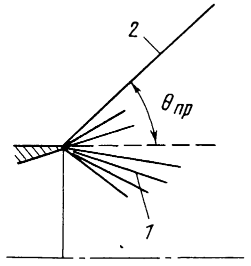


Рис. 1.6. Схема истечения струи в вакуум:

1 — центрированная волна разрежения, *2* — граница струи идеального газа

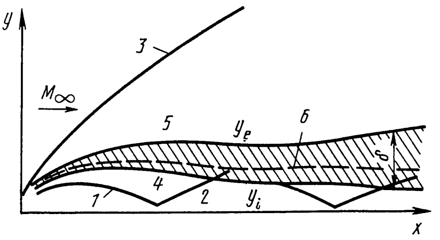


Рис. 1.7. Структура недорасширенной струи в спутном сверхзвуковом потоке:

1 — висячий скачок, *2* — отраженный скачок; *3* — ударная волна в спутном потоке, *4* — внутренняя граница слоя смешения, *5* — внешняя граница слоя смешения; *6* — условная граница струи, δ — толщина слоя смешения

Отметим, что в реальном газе отсутствует граница струи, на которой плотность равна нулю. Истекающий из сопла газ распространяется во всем пространстве. Это связано с эффектами разреженности течения.

Внутри струи на расстояниях, значительно превышающих размер выходного сечения сопла, течение приобретает характер «течения от источника» с переменной в окружном направлении интенсивностью. При этом скорость газа приближается к своему максимальному значению, равному $W_{\max}=\sqrt{2H_a}$, а линии тока асимптотически приближаются к прямым линиям, проведенным из центра среза сопла.

Поскольку течение в этом случае приобретает радиальный характер с почти постоянной скоростью $W_{\max}$, то из условия сохранения расхода вдоль каждой струйки тока следует, что плотность в этой области уменьшается пропорционально квадрату расстояния от среза сопла. Такой темп изменения плотности приводит к постепенному уменьшению числа столкновений между молекулами и ведет к нарушению химического равновесия и равновесия по внутренним степеням свободы молекул расширяющегося газа. На достаточно большом удалении от сопла (практически нет столкновений между молекулами) нарушается равновесие и по поступательным степеням свободы. Здесь становится несправедливым приближение сплошной среды.

Важно иметь в виду, что область течения сильно недорасширенной струи, ограниченная висячим и центральным скачками, имеет такое же распределение параметров, которое реализовалось бы в этом участке при истечении газа в вакуум с теми же условиями на срезе сопла.

Подробное исследование режима истечения струи в вакуум представлено в работе [54].

Рассмотрим теперь структуру неизобарической струи при наличии спутного потока. В этом случае давление вдоль границы струи оказывается переменным. Однако для дозвукового потока отличие давления от p_∞ незначительно и поэтому структура такой спутной струи мало отличается от структуры затопленной струи.

Экспериментальные и расчетные исследования выявили очень существенное влияние сверхзвукового спутного потока на газодинамическую структуру струи большой степени нерасчетности. Это влияние обусловливается тем, что в спутном потоке перед струей образуется криволинейная ударная волна, а давление вдоль границы струи оказывается переменным (рис. 1.7).

Наиболее важный эффект сверхзвукового спутного потока состоит в том, что с увеличением M_∞ происходит уменьшение размера центрального скачка и при M_∞ отражение висячего скачка практически можно считать регулярным. Ввиду этого оказывается невозможным моделировать неизобарическую струю, истекающую в сверхзвуковой спутный поток, затопленной струей с некоторым «эффективным» значением нерасчетности.

Образование в неизобарической струе бочкообразных волновых структур приводит к появлению характерных продольного X и поперечного Y размеров течения, а также характерного угла $\theta \sim Y/X$, определяемых этими волновыми структурами. Так, для начального участка струи в качестве характерного продольного размера X часто принимают расстояние от среза сопла до максимального миделя бочкообразной границы струи или висячего скачка, или до диска Маха. За характерный поперечный размер при этом принимают радиусы соответствующих элементов.

Величины X и Y являются функциями определяющих параметров n, γ_a, M_a, θ_a, γ_∞, M_∞, а также параметров, связанных с проявлением реальных свойств газов, таких как вязкость, теплопроводность и др.

На примере истечения в затопленное пространство из гиперзвукового сопла на режиме сильного недорасширения можно наглядно пояснить зависимость характерных размеров X и Y от параметров n, γ_a и M_a. В этом случае на выходе из сопла газ ускоряется до большой сверхзвуковой скорости, близкой к максимальной скорости истечения W_{max}, так что характерная продольная составляющая скорости U в пределах начального участка струи остается приближенно постоянной — $U \approx W_a \approx W_{max}$. При этом основная доля тепловой энергии газа $e_a = c_{va} T_a$ на срезе сопла, как показано далее, расходуется на придание газу поперечного движения. Характерная скорость V в поперечном направлении по порядку величины равна $V \sim \sqrt{c_{va} T_a}$, а характерный угол течения θ будет определяться отношением

$$\theta \sim V/U \sim \left[\gamma_a(\gamma_a - 1)\right]^{-1/2} M_a^{-1}.$$

Условия $U = \text{const}$ и $\theta < 1$ позволяют применить для приближенного описания течения в струе метод нестационарной аналогии (закон плоских сечений). В соответствии с этим методом, используя связь продольной координаты x с временем t по соотношениям $x = Ut$ и $dx = Udt$, можно следующим образом определить размеры X и Y.

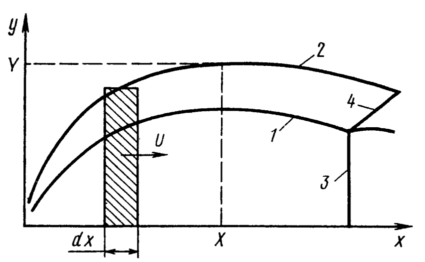


Рис. 1.8. Схема метода плоских сечений для истечения недорасширенной струи в затопленное пространство

Выделим в поперечном сечении струи плоский слой (см. рис. 1.8) толщиной dx, масса газа, прошедшего через сопло за время dt, равна $G_a dt$. Считается, что тепловая энергия этой массы $e_a G_a dt$ целиком расходуется на работу против сил давления со стороны газа затопленного пространства

$$e_a G_a dt = p_\infty \pi Y^2 dx,$$

после замены в последнем соотношении $dt = dx/U$ находим

$$Y/r_a \approx [e_a G_a/(\pi p_\infty W_a)]^{1/2} = \sqrt{n/(\gamma_a - 1)}.$$

Для продольного размера X при этом получаем

$$X \sim Y/\theta \sim \mathrm{M}_a \sqrt{\gamma_a n} \cdot r_a.$$

Диапазон изменения параметра n в практических задачах очень велик — от десятых долей до величины порядка 10^{10}. Поэтому соответствующие изменения X и Y от n являются очень значительными. Экспериментальными исследованиями и расчетом установлено, что пропорциональность характерных размеров $\sqrt{n}$ приближенно выполняется в очень широких пределах для сильно недорасширенных струй (при $n > 3$).

При истечении в спутный сверхзвуковой поток при $\mathrm{M}_\infty \geqslant 2$ давление вдоль границы струи переменное, а его величина в начальном участке сильно недорасширенной струи пропорциональна $p_\infty \gamma_\infty \mathrm{M}_\infty^2$, что приводит к следующим зависимостям размеров X и Y от определяющих параметров:

$$Y/r_a \sim (\gamma_a/\gamma_\infty)(\mathrm{M}_a/\mathrm{M}_\infty) n^{1/2}; \quad X \sim Y/\theta,$$

а для θ сохраняется прежняя оценка.

Численные расчеты в рамках модели идеального газа позволили установить для начального участка недорасширенной струи автомодельность его геометрической формы (ударные волны, граница) и распределения параметров в координатах подобия x/X и y/Y, а также выявить гиперзвуковой параметр подобия $K \sim \mathrm{M}_\infty \theta \sim \mathrm{M}_\infty Y/X \sim \mathrm{M}_\infty/\mathrm{M}_a$. При слабом влиянии эффектов вязкости (большие числа Рейнольдса при ламинарном режиме течения и близость к единице параметра спутности m при турбулентном режиме) принцип автомодельности может быть сформулирован в виде следующего правила: при одинаковых значениях параметра гиперзвукового подобия $K = \mathrm{M}_\infty \theta$ в сходственных сечениях $x/X = \mathrm{const}$ поля распределения параметров подобны по нормированной координате $\eta = y/Y$.

Расчетные исследования [25, 52] также показали, что в большей части начального участка недорасширенной струи основная масса истекающего из сопла газа концентрируется в тонком сжатом слое вблизи границы. При этом распределение параметров вблизи границы существенно неравномерное, что объясняется образованием низкоэнтропийного слоя газа струи, прилежащего к внутренней стороне границы, и, наоборот, высокоэнтропийного слоя газа спутного потока, прилежащего к внешней стороне границы струи. Так как в реальном течении вдоль границы струи образуется слой смешения, то его развитие происходит в условиях завихренного течения. При этом следует иметь в виду, что через слой смешения также может протекать значительная доля от всего расхода струи.

Рассмотрим теперь влияние вязких эффектов на течение в неизобарической струе. Уже отмечалось, что эти эффекты являются определяющими в основном участке струи, а также в значительной степени и в переходном участке. Вместе с этим экспериментальные исследования [13, 56, 57, 59] показали, что влияние вязкости необходимо учитывать и при описании течения в начальном участке.

Проявление вязких эффектов в начальном участке неизобарической струи многообразно. Сюда относятся как процессы, связанные с образованием пограничного слоя на внешней и внутренней поверхностях обтекаемого внешним потоком аппарата, из которого истекает струя, так и процессы вязкости, теплопроводности и диффузии, протекающие ниже по течению от сопла в слое смешения. Эти процессы могут происходить как при ламинарном, так и при турбулентном режимах.

Наличие пограничного слоя в сопле обусловливает повышение энтропии в струйках тока, протекающих вблизи границы струи, и тем самым уменьшает поперечный градиент энтропии в этой зоне по сравнению со случаем невязкого течения. Пограничный слой на наружной поверхности обтекаемого аппарата взаимодействует с истекающей из сопла струей. При истечении на режиме перерасширения ($n<1$) или на режимах с небольшими недорасширениями ($n \lesssim 10$) и при острой выходной кромке сопла реализуется безотрывное взаимодействие (см. рис. 1.7). С ростом степени нерасчетности при некотором угле отклонения границы струи в сторону спутного потока возникает отрыв наружного пограничного слоя и реализуется течение, схематически изображенное на рис. 1.9. При этом перед зоной отрыва (как на изломе образующей твердой стенки) образуется ударная волна, если спутный поток является сверхзвуковым. Параметры отрывной зоны (угол и линейные размеры) зависят от режима течения в пограничном слое. Например, для турбулентного режима угол отрыва значительно больше, чем для ламинарного.

При дальнейшем увеличении степени нерасчетности длина отрывной зоны возрастает и оказывается равной длине аппарата (при ламинарном режиме течения можно считать, что это практически реализуется всегда) и далее начинает увеличиваться угол отрывной зоны. При этом последний всегда меньше, чем угол наклона границы струи вблизи выходной кромки сопла, так что достижение предельного угла отклонения внешнего потока в коническом скачке уплотнения здесь затягивается по сравнению со случаем невязкого обтекания. Для некоторых, достаточно больших значений степени нерасчетности ($n \sim 10^5 \ldots 10^6$) перед отрывной зоной, имеющей угол, больший предельного, в спутном

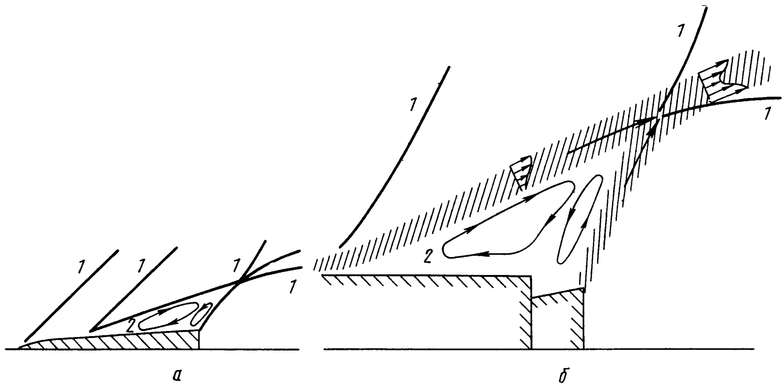


Рис. 1.9. Схемы обтекания струи с отрывом пограничного слоя

а — истечение из сопла с острой выходной кромкой; *б* — течение с донной областью; *1* — ударные волны; *2* — отрывная зона

потоке образуется отошедшая ударная волна (рис. 1.10). Обтекание поверхности аппарата дозвуковым потоком за отошедшей ударной волной происходит также с отрывом пограничного слоя на корпусе аппарата.

Если выходная кромка сопла не является острой (см. рис. 1.9, *б*), то в области кормового среза аппарата реализуется отрывное течение как в спутном потоке, так и в истекающей струе. В донной области аппарата при этом образуется застойная зона с вихревыми течениями.

Во всех случаях проявление вязких диссипативных процессов приводит к тому, что вблизи выходной кромки сопла слой смешения имеет некоторую начальную толщину δ_0 и его центральная часть характеризуется повышенными величинами энтропии и дефектом скорости, схематически изображенным на рис. 1.9, *б*. Влияние этого начального профиля скорости сказывается до тех пор, пока масса газов, подмешавшихся ниже по течению, не превысит массы, участвовавшей при установлении данного начального профиля. При степенях нерасчетности $n > 10$, как показывают результаты экспериментов [27, 56, 57], влияние начального профиля сказывается на распределении параметров слабо в большей части начального участка.

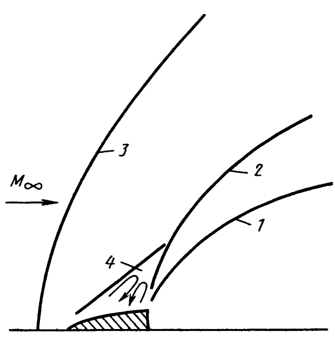


Рис. 1.10. Схема обтекания сверхзвуковым потоком струи очень большой степени нерасчетности:

1 — висячий скачок; *2* — граница струи; *3* — отошедшая ударная волна в спутном потоке; *4* — отрывная зона

Развитие слоя смешения вдоль границы, разделяющей струйный и спутный потоки, оказывает значительное влияние на распределение параметров в сильно недорасширенной струе. Поскольку при $n>10$ через слой смешения примерно в середине начального участка протекает значительная доля всего расхода струи, то процессы вязкой диссипации, охватывающие большие массы газа, оказывают влияние и на параметры в соседних со слоем смешения невязких зонах. При этом происходит и изменение положения ударных волн — их оттеснение. Возникает эффект вязкого взаимодействия, сходный по своей природе с явлением, которое имеет место при обтекании пластины вязким гиперзвуковым потоком.

Это явление, обнаруженное в экспериментальных и теоретических исследованиях, было изучено как для ламинарного, так и для турбулентного режимов течения. Оказалось, что характер и интенсивность вязкого взаимодействия при турбулентном и ламинарном режимах течения в слое смешения имеют различные закономерности.

Для описания характера и параметров течения в слое смешения, а также явления вязкого взаимодействия удобно ввести число Рейнольдса Re_X, вычисляемое по средним параметрам в слое смешения (например, на линии, где значение скорости равно полусумме скоростей струи и внешнего потоков) и характерной длине X начального участка. Так вычисленное число Рейнольдса связано с введенными ранее числами Re_a и Re_∞, а также зависит от таких параметров течения, как n, M_a и M_∞ и др. Например, для случая истечения струи в затопленное пространство, как будет показано далее, $\mathrm{Re}_X \sim \mathrm{Re}_a/\sqrt{n}$. Более сложная связь имеет место для истечения струи в спутный поток.

Число Re_X в отличие от формально введенных Re_a и Re_∞ отражает локальные условия течения в слое смешения, и поэтому позволяет классифицировать течение по различным режимам.

При турбулентном режиме течения распределение параметров внутри него и эффект взаимодействия в основном определяются величинами параметра спутности $m_0=W_\infty/W_{\max}$ ($W_{\max}$ — максимальная скорость истечения) и энтальпийного фактора $i_0=H_\infty/H_a$ и не зависят от числа Рейнольдса. Таким образом, автомодельность распределения параметров в сходственных сечениях x/X начального участка струи имеет место при фиксированных значениях параметра гиперзвукового подобия $K=M_\infty\theta$ и параметров m_0 и i_0. Интенсивность вязкого взаимодействия существенно зависит от параметра спутности m_0. При значениях m_0, близких к единице, толщина турбулентного слоя смешения мала и вязкое взаимодействие струи со спутным потоком проявляется слабо. При этом геометрическая структура и распределение параметров, за исключением зоны тонкого слоя смешения, близки к рассчитанным по теории невязкой жидкости. При отклонении m_0 от единицы как в сторону бóльших, так и в сторону меньших значений увеличивается темп нарастания слоя смешения, одновременно увеличивается и интенсивность вязкого взаимодействия, приводящего, в частности, к оттеснению висячего скачка к оси. Распределение параметров здесь существенно отличается от рассчитанных по модели невязкой жидкости.

При ламинарном режиме течения ($Re_X < 10^3$) влияние параметров m_0 и i_0 является более слабым. Увеличение толщины слоя смешения, распределение параметров и вязкое взаимодействие в основном определяются числом Рейнольдса, вычисленным по характерным параметрам в слое смешения и характерной длине начального участка струи. Экспериментально и теоретически установлено, что при больших числах Re_X и ламинарном режиме течения толщина слоя смешения на начальном участке мала, вязкое взаимодействие проявляется слабо и газодинамическая структура струи близка к рассчитываемой без учета вязкости. Уменьшение числа Re_X приводит к утолщению слоя смешения, перераспределению параметров в сжатом слое смешения, оттеснению висячего скачка. Автомодельность распределения параметров в сходственных сечениях x/X начального участка струи имеет место при фиксированных значениях параметра гиперзвукового подобия и числа Re_X.

В экспериментах было обнаружено явление перехода режима течения в слое смешения начального участка струи от ламинарного к турбулентному. Анализ этих результатов позволил наметить границы, разделяющие эти режимы. Так для затопленной струи переход от ламинарного режима течения в начальном участке к турбулентному происходит в диапазоне чисел Re_X от 10^3 до 10^4. Переход в слое смешения высотной струи, истекающей в сверхзвуковой спутный поток, помимо числа Re_X определяется также параметром спутности m_0 и параметром взаимодействия истекающей струи со спутным потоком в окрестности ЛА. В результате полученных данных найдено, что для ЛА с тягой 10^6 Н течение в слое смешения становится ламинарным на всей длине начального участка на высотах порядка 80 . . . 100 км; когда число Re_X имеет величину порядка $10^4 \ldots 10^6$, параметр спутности m_0 оказывается близким к единице, а обтекание струи спутным потоком переходит от режима с отрывом пограничного слоя на корпусе аппарата к режиму с образованием отошедшей ударной волны.

Результаты специально проведенного цикла экспериментальных исследований [46, 57] позволили также установить физическую картину и закономерность перехода течения от ламинарного режима к режимам, при которых проявляются эффекты разреженности. Такой переход наблюдается при уменьшении чисел Re_X, когда $Re_X < 10^2$. При таких режимах из-за утолщения слоя смешения и ударных волн происходит смыкание и перекрытие их зон, так что сжатый слой струи становится полностью вязким. Дальнейшее уменьшение Re_X приводит к проникновению газа затопленного пространства или спутного потока в зону изоэнтропийного ядра струи. При $\mathrm{Re}_X < 10$ струя приобретает диффузную структуру. При этом важно отметить, что поскольку $\mathrm{Re}_X \sim \mathrm{Re}_a / \sqrt{n}$, то его уменьшение может происходить как в результате уменьшения Re_a, так и вследствие увеличения n. В соответствии с этим имеют место два различных предельных (при $\mathrm{Re}_X \to 0$) режима истечения. Если уменьшение Re_X происходит из-за уменьшения Re_a, то предельным является так называемый *эффузионный* режим истечения, характеристики которого зависят от эффектов разреженности в сопле. Если же число Re_a остается достаточно большим (например, $\mathrm{Re}_a > 10^3$), так что течение в сопле обладает свойствами сплошной среды, то при неограниченном увеличении степени нерасчетности n предельным режимом является истечение струи в абсолютный вакуум (см. разд. 2).

Многие практические приложения связаны с течением высокотемпературных газов в сверхзвуковых неизобарических струях. Поэтому необходимо исследование протекания различных физико-химических процессов, сопровождающих истечение реальных газов, таких, как процессы горения, конденсации, возбуждения и дезактивации внутренних степеней свободы молекул (вращательных, колебательных).

Быстрое уменьшение уровня давления в недорасширенных струях обусловливает неравновесный характер протекания физико-химических процессов. Учет этих неравновесных процессов совместно с эффектами вязкости в сильно недорасширенных струях представляет значительные трудности для численного моделирования на ЭВМ, так же как в физическом эксперименте иногда просто не удается воспроизвести необходимые условия.

Наиболее подробно изучено протекание релаксационных процессов при истечении струи в вакуум [см.,например, 54], что для сильно недорасширенной струи соответствует течению в ее внутреннем ядре.

На практике часто возникают задачи, связанные с определением структуры струй от устройств с неосесимметричной конфигурацией. К такому классу, например, относится случай системы струй, истекающих из близко расположенных осесимметричных сопл. Здесь существенным фактором является взаимодействие струй между собой, в результате чего их свойства отличаются от свойств струи, истекающей из одиночного сопла. В общем случае структура течения в такой системе струй довольно сложна, а ее расчет в точной постановке затруднителен, поэтому очень важно накапливать и обобщать экспериментальные данные. В качестве примера успешной реализации такого подхода можно отметить следующее обобщение, сделанное для случая истечения при сильном недорасширении ($n > 10$) из нескольких близко расположенных (порядка нескольких r_a) сопл. Установлено, что здесь, несмотря на наличие вблизи срезов сопл сложной системы интерференционных волн, образуется «суммарная» бочкообразная структура, которая по конфигурации и своим свойствам напоминает бочкообразную структуру начального участка струи от одиночного сопла. При этом характерные размеры этой структуры могут быть приближенно определены по соотношениям для одиночной струи, если мысленно заменить компоновку сопл некоторым эквивалентным одиночным соплом с расходом и потоками импульса и энергии, равными сумме этих характеристик всех сопл данной компоновки.

1.2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СВЕРХЗВУКОВЫХ НЕИЗОБАРИЧЕСКИХ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ

1.2.1. Общая система уравнений движения газа с неравновесными физико-химическими превращениями

Анализ течения в сверхзвуковых неизобарических струях основывается как на результатах физического эксперимента на газодинамических установках, так и вычислительного эксперимента (математического моделирования) на ЭВМ. Вычислительный эксперимент сейчас приобрел большое значение при изучении сложных явлений и процессов в различных областях науки, в том числе и в физической газовой динамике.

Поэтому прежде чем перейти к непосредственному анализу неизобарических струйных течений, представляется целесообразным рассмотреть математические модели таких течений. Численные алгоритмы, реализующие эти модели на ЭВМ, так же как методы физического моделирования, читатель может найти в работе [54].

В режиме сплошной среды состояние движущегося газа определяется заданием скорости, давления, плотности и температуры как функций от координат и времени. Для определения этих функций служит система уравнений, которые представляют собой выраженные в интегральной или дифференциальной формах фундаментальные законы сохранения массы, количества движения и энергии.

Общая математическая модель сверхзвуковой неизобарической струи должна учитывать также возможность неравновесного протекания различных физико-химических процессов.

Приведем без вывода дифференциальные уравнения сохранения массы, количества движения и энергии для общего случая нестационарного пространственного течения многокомпонентной многофазной сплошной среды при наличии релаксационных процессов и взаимодействия между фазами.

Примем сначала, что смесь состоит только из N газовых компонентов.

В рамках приближения сплошной среды естественно считать, что в газе имеет место равновесие по поступательным степеням свободы молекул, так что можно говорить о единой для всех газовых компонентов термодинамической температуре T. Вообще говоря, при очень больших степенях нерасчетности в неизобарических струях могут возникать области течения, в которых наблюдается нарушение максвелловского распределения частиц по скоростям их поступательного движения. Это свидетельствует о неприменимости в этой области приближения сплошной среды. В этом случае необходимо использовать методы кинетической теории газов. В этой книге вопросы математического моделирования струйных течений сильно разреженного газа не затрагиваются.

Каждый компонент будем характеризовать плотностью ϱ_i, скоростью $\boldsymbol{W}_i$, удельными внутренней энергией e_i и энтальпией h_i.

Для смеси в целом вводится плотность ϱ и среднемассовая скорость $\boldsymbol{W}$

$$\varrho=\sum_{i=1}^{N}\varrho_i,\ \boldsymbol{W}=\sum_{i=1}^{N}\varrho_i\boldsymbol{W}_i/\varrho\,.$$

Используются также диффузионные скорости $\boldsymbol{V}_i$ относительно центра масс смеси

$$\boldsymbol{V}_i=\boldsymbol{W}_i-\boldsymbol{W};\ \ \sum_{i=1}^{N}\varrho_i\boldsymbol{V}_i=0.$$

Рассмотрим так называемое *диффузионное приближение* в механике гомогенных смесей, согласно которому можно пренебречь в уравнениях квадратами диффузионных скоростей $\mathbf{V}_i$.

Тогда имеем следующую систему уравнений сохранения массы, количества движения и энергии смеси, а также массы отдельных компонентов в векторно-тензорной форме записи:

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t}+\mathrm{div}(\varrho\boldsymbol{W})=0; \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\varrho\boldsymbol{W}}{\partial t}+\mathrm{div}(\varrho\boldsymbol{W}\boldsymbol{W})=-\mathrm{grad}p+\mathrm{div}\Pi; \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial\varrho E}{\partial t}+\mathrm{div}\left[\varrho\boldsymbol{W}\left(E+\frac{p}{\rho}\right)\right]=\mathrm{div}\,(\Pi\boldsymbol{W}-\boldsymbol{q}_\Sigma); \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial\varrho_i}{dt}+\mathrm{div}(\varrho_i\boldsymbol{W})=-\mathrm{div}\boldsymbol{I}_i+\left(\frac{d\rho_i}{dt}\right)_p,\ (i=1,\ldots,N), \tag{1.4}$$

где $E=e+W^2/2$ и e — удельные полная и внутренняя энергии смеси соответственно; Π — тензор вязких (касательных) напряжений; $\boldsymbol{q}_\Sigma$ — вектор плотности полного теплового потока; $\boldsymbol{I}_i=\rho_i\boldsymbol{V}_i$ — вектор плотности диффузионного потока i-го компонента; $(d\varrho_i/dt)_p$ — скорость изменения массы i-го компонента в единице объема в результате различных релаксационных процессов (химических реакций, переходов молекул из одного возбужденного состояния в другое, конденсации или испарения). Массовые силы и внешние тепловые источники не учитываются.

Примем, что имеет место линейная зависимость между составляющими тензора напряжений Π и тензора скоростей деформации $\dot{\boldsymbol{S}}$ (закон Ньютона)

$$\Pi=2\mu\dot{\boldsymbol{S}}+\left[\left(\mu'-\frac{2}{3}\mu\right)\operatorname{div}\boldsymbol{W}\right]\varepsilon,$$

где μ — динамический коэффициент вязкости смеси; μ' — второй коэффициент вязкости, который обычно полагается равным нулю; ε — тензорная единица.

Пренебрежем термо- и бародиффузией. Тогда согласно обобщенному закону Фурье

$$\boldsymbol{q}_\Sigma=-\lambda\operatorname{grad}T+\sum_{i=1}^{N}h_i\boldsymbol{I}_i,$$

где λ — коэффициент теплопроводности смеси.

Диффузионный поток наиболее просто записывается для бинарной смеси (закон Фика)

$$\boldsymbol{I}_i=\rho_i\boldsymbol{V}_i=-\rho D_i\operatorname{grad}c_i,$$

где $D_i=D_{12}$ — коэффициент бинарной диффузии; $c_i=\varrho_i/\varrho$ — массовая концентрация i-го компонента. При большом числе компонентов смесь приближенно можно рассматривать как бинарную, разделив все компоненты на две группы, состоящие из легких и тяжелых молекул.

Для более строгого описания диффузионного переноса массы необходимо привлекать соотношения Стефана—Максвелла.

Коэффициенты вязкости и теплопроводности μ и λ, коэффициент бинарной диффузии D_{12} могут быть определены из молекулярно-кинетической теории газовых смесей. В практических расчетах для определения коэффициента вязкости (при ламинарном течении в струе) обычно пользуются формулой Сазерленда или степенной зависимостью μ от T. Кроме того, известно, что числа Прандтля $\mathrm{Pr}=\mu c_p/\lambda$ и Шмидта $\mathrm{Sc}=\mu/\varrho D_{12}$ для реальных смесей близки к 0,7. Эти соотношения позволяют определить λ и D_{12} при известных μ и c_p.

Чтобы замкнуть систему уравнений (1.1) ... (1.4), необходимо привлечь уравнения состояния. Для характерных условий течения в неизобарических струях газы можно считать термически совершенными. Тогда термическое уравнение состояния имеет вид

$$p=\frac{R^\circ\rho T}{M};\ M^\circ=(\sum_{i=1}^{N} c_i/M_i^\circ)^{-1}, \tag{1.5}$$

где R° — универсальная газовая постоянная; M° и M_i° — молекулярные массы смеси и i-го компонента соответственно.

Будем считать, что поступательные и вращательные степени свободы находятся в равновесии. Тогда калорическое уравнение состояния для отдельного компонента можно записать в виде

$$e_i=c_{v_i}^{(a)}T+e_i^{(v)}+e_i^{(\circ)},\ h_i=e_i+R^\circ T/M_i, \tag{1.6}$$

а для смеси в целом

$$e=\sum_{i=1}^{N} c_ie_i,\ h=\sum_{i=1}^{N} c_ih_i=e+p/\rho. \tag{1.7}$$

Здесь $c_{vi}^a=\frac{1}{2}l_iR^\circ/M_i^\circ$ — изохорная удельная теплоемкость i-го компонента, соответствующая поступательным и вращательным степеням свободы, число которых равно l_i; $e_i^{(v)}$ и $e^{(\circ)}$ — удельные колебательная энергия и энергия образования i-го компонента; e и h — удельные внутренняя энергия и энтальпия смеси.

Если колебательные степени свободы находятся в равновесии с поступательными, то $e_i=e_i(T)$ и $h_i=h_i(T)$. Соответствующие зависимости можно найти в ряде справочных изданий.

Уравнение (1.4) удобно записать для массовой концентрации c_i. Используя уравнение неразрывности (1.1), из (1.4) получим

$$\frac{\partial c_i}{\partial t}+(\boldsymbol{W}\cdot\nabla)c_i=\frac{1}{\rho}\operatorname{div}(\rho D_i\operatorname{grad}c_i)+\left(\frac{dc_i}{dt}\right)_p. \tag{1.8}$$

Строго говоря, в неравновесном течении каждое колебательно-возбужденное состояние молекул следует рассматривать как самостоятельный компонент смеси. Из-за необходимости учитывать большое число колебательных уровней такой подход является весьма громоздким и не всегда оправданным. Обычно отдельную колебательную моду (степень свободы) можно рассматривать как термодинамическую подсистему, внутри которой существует равновесие (т. е. можно ввести колебательную температуру), но которая является незамкнутой и обменивается энергией с другими подсистемами. Этот обмен описывается релаксационными уравнениями для колебательной энергии

$$\left(\frac{de_k^{(v)}}{dt}\right)_p=\Phi_k\,(p,\,T,\,\langle e_k^{(v)}\rangle),\,(k=1,\,\ldots,\,N_k), \tag{1.9}$$

где $e_k^{(v)}$ — колебательная энергия k-й колебательной моды в единице массы смеси; N_k — число колебательных мод в смеси; $\langle e_k^{(v)} \rangle$ обозначает всю совокупность $e_1^{(v)}, \ldots, e_{N_k}^{(v)}$. Правая часть уравнения (1.9) учитывает изменение колебательной энергии при столкновениях молекул в результате колебательно-поступательных и колебательно-колебательных переходов, а также химических реакций.

Для химических реакций

$$\left(\frac{dc_i}{dt}\right)_p = F_i\ (p, T, \langle c_i \rangle, \langle T_i^{(v)} \rangle), \ (i=1, \ldots, N). \qquad (1.10)$$

Присутствие $\langle T_i^{(v)} \rangle$ в правой части (1.10) отражает тот факт, что в общем случае константа скорости реакции зависит не только от температуры газа, но и от колебательных температур молекул, участвующих в реакции.

Таким образом, при протекании в смеси химических реакций и колебательной релаксации система уравнений (1.1) ... (1.4) дополняется уравнениями

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + (\boldsymbol{W} \cdot \blacktriangledown) c_i = \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\rho D_i \operatorname{grad} c_i) + F_i, \ (i=1, \ldots, N); \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial e_k^{(v)}}{\partial t} + (\boldsymbol{W} \cdot \blacktriangledown) e_k^{(v)} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\rho D_k \operatorname{grad} e_k^{(v)}) + \\ + \Phi_k, (i=1, \ldots N_k). \qquad (1.12)$$

Математическая модель двух- или многофазной неизобарической струи основывается на гипотезе о взаимопроникающем движении двух или более сплошных сред — собственно газа и «газа» частиц. Относительно газа частиц делаются следующие предположения. Расстояния, на которых существенно изменяются параметры течения, много больше расстояний между частицами. Давление газа частиц, обусловленное их хаотическим движением, мало по сравнению с давлением собственно газа; объем, занимаемый только частицами, пренебрежимо мал.

Из-за недостатка места в этом рассмотрении пренебрежем обменом массой между фазами — процессами испарения и конденсации (по этому вопросу см., например, работы [41, 54]).

Пусть в потоке содержатся частицы различных размеров, распределенные по M группам. Придадим параметрам частиц нижний индекс p и будем помечать частицы определенного размера индексом j.

Взаимодействие между фазами учитывается дополнительными членами в уравнениях количества движения (1.2) и энергии (1.3) газа, которые принимают вид

$$\frac{\partial \rho \boldsymbol{W}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{W} \boldsymbol{W}) = -\operatorname{grad} p + \operatorname{div} \boldsymbol{\Pi} - \sum_{j=1}^{M} \rho_{pj} \boldsymbol{f}_j; \qquad (1.13)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t}+\operatorname{div}\left[\rho \boldsymbol{W}\left(E+\frac{p}{\rho}\right)\right]=\operatorname{div}(\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{W}-q_{\Sigma})-$$

$$-\sum_{j=1}^{M}\rho_{pj}(q_j+\boldsymbol{f}_j\boldsymbol{W}_{pj}). \qquad (1.14)$$

К системе уравнений движения газа добавляются уравнения движения частиц

$$\frac{\partial \rho_{pj}}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho_{pj}\boldsymbol{W}_{pj})=0; \qquad (1.15)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{W}_{pj}}{\partial t}+(\boldsymbol{W}_{pj}\cdot\nabla)\boldsymbol{W}_{pj}=\boldsymbol{f}_j; \qquad (1.16)$$

$$\frac{\partial e_{pj}}{\partial t}+(\boldsymbol{W}_{pj}\cdot\nabla)e_{pj}=q_j \qquad (1.17)$$

и уравнение состояния частиц

$$e_{pj}=c^{\circ}T_{pj},$$

где c° — теплоемкость материала частиц. В этих уравнениях $\boldsymbol{f}_j$ и q_j — сила и тепловой поток, действующие со стороны газа на частицы, содержащиеся в единице объема газа, отнесенные к массе этих частиц.

Для решения полной системы уравнений необходимы конкретные формулы для функций F_i, Φ_k, $\boldsymbol{f}_i$ и q_j. Читатель может найти их в соответствующих разделах физики и механики. Необходимые сведения содержатся также в работе [54], а по $\boldsymbol{f}_j$ и q_j — в подразд. 3.3.4.

Полная система уравнений чрезвычайно сложна для решения. Поэтому на практике для исследования неизобарических струй используют различные упрощенные математические модели, являющиеся частными случаями рассмотренной общей модели.

Упрощение может быть связано с уменьшением размерности задачи. Например, к настоящему времени изучены в основном только стационарные течения, причем наиболее полно двумерные, а именно — осесимметричные. Нестационарные уравнения использовались для построения стационарных решений методом установления.

Естественно, что задачу упрощает уменьшение числа релаксационных процессов.

Рассмотрим упрощенные математические модели, связанные с пренебрежением теми или иными физическими эффектами в сверхзвуковой неизобарической струе.

1.2.2. Модель идеального газа для исследования сверхзвуковых неизобарических струй

В гидро- и газодинамике используется модель идеального газа. Под идеальным газом (жидкостью) здесь подразумевается сплошная среда, в которой отсутствуют диссипативные процессы, обусловленные вязкостью и теплопроводностью этой среды. Модель идеального газа часто используется даже в условиях заметного влияния диссипативных процессов, если область их протекания локализована в потоке.

Именно такая картина течения наблюдается на начальном участке (в первой бочке) сверхзвуковой неизобарической струи. Если не рассматривать режимы течения с очень низкими числами Рейнольдса, когда существенную роль играют эффекты разреженности, на начальном участке струи волновые процессы обычно превалируют над процессами вязкого перемешивания, происходящими только в развивающемся вдоль границы струи слое смешения.

Существуют условия течения, когда толщина слоя смешения в пределах начального участка оказывается малой по сравнению с поперечными размерами струи. Такие условия имеют место при ламинарном режиме течения и достаточно больших местных числах Рейнольдса, а также при турбулентном режиме течения и параметре спутности (отношении скорости спутного потока и скорости струи), близком к единице. При таких условиях модель идеального газа является хорошим приближением к действительности. При толщине слоя смешения, заметной по сравнению с толщиной сжатого слоя, вязкое взаимодействие, обусловленное слоем смешения, как показывает эксперимент, изменяет положение ударных волн и соответственно распределение газодинамических параметров даже в зонах невязкого течения. Однако и в этих условиях модель идеального газа дает качественно правильное описание влияния таких основных определяющих параметров, как степень нерасчетности, числа Маха сопла и спутного потока, отношения удельных теплоемкостей газа струи и спутного потока.

Уравнения Эйлера, описывающие течения идеального газа, можно получить из общей системы уравнений (1.1) ... (1.3), если положить в ней $\boldsymbol{\Pi}=\boldsymbol{q}_{\Sigma}=\boldsymbol{I}_i=0$.

Эти уравнения могут быть записаны в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\boldsymbol{W}=0; \tag{1.18}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{W}}{dt}+\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p=0; \tag{1.19}$$

$$\frac{dh}{dt}-\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dt}=0, \tag{1.20}$$

где $\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+(\boldsymbol{W}\cdot\nabla)$ — полная или субстанциональная производная.

Чтобы замкнуть эту систему уравнений, необходимо дополнить ее уравнениями состояния, вид которых зависит от термодинамической модели газа. В общем случае, когда в газе могут происходить неравновесные физико-химические процессы, систему уравнений необходимо дополнить уравнениями состояния в форме (1.5) ... (1.7), а также релаксационными уравнениями (1.11), (1.12) при $D_i=D_k\equiv 0$.

В случае равновесного течения уравнения состояния имеют вид

$$\varrho=\varrho(p, T); \tag{1.21}$$

$$e=e(p, T); \quad h=h(p, T). \tag{1.22}$$

В случае течения совершенного газа или полностью замороженного течения уравнение (1.20) можно записать в виде

$$-\frac{dp}{dt}-\gamma\frac{p}{\varrho}\frac{d\varrho}{dt}=0, \tag{1.23}$$

где отношение удельных теплоемкостей газа γ является заданным или определяется по замороженному составу смеси

$$\gamma=\left[1-\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{N}\left(\frac{l_i}{2}+1\right)c_i\frac{M^\circ}{M_i^\circ}}\right]^{-1}.$$

Это позволяет сократить число искомых функций и замкнуть систему уравнений без уравнения состояния.

В стационарном $(\partial/\partial t\equiv 0/)$ адиабатическом течении совершенного газа, а также в однофазном течении с произвольными физико-химическими превращениями, равновесными или неравновесными, вдоль линии тока выполняется интеграл Бернулли

$$\frac{W^2}{2}+h=H.$$

Полная энтальпия H постоянна вдоль линии тока, но может отличаться при переходе от одной линии тока к другой. В изоэнергетическом течении она одинакова на всех линиях тока.

Если течение является нестационарным или стационарным, но сверхзвуковым, то система уравнений (1.18) ... (1.20) является системой гиперболического типа, для которой существуют действительные характеристики. Поэтому система уравнений в частных производных может быть записана в виде характеристических уравнений, которые тоже используются для построения численного решения.

Существование у гиперболических уравнений действительных характеристик определяет важное свойство решений этих уравнений — существование разрывов газодинамических величин. При этом разрывы в решениях обычно присутствуют не только в силу начальных условий, но могут возникать и при сколь угодно гладких начальных условиях.

Непосредственно на разрывах дифференциальные уравнения неприменимы, но на разрывах должны выполняться определенные соотношения, вытекающие из интегральных законов сохранения массы, импульса и энергии. Эти соотношения имеют вид:

$$[\rho v_n]=0; \quad [\rho v_n \boldsymbol{W}+p\boldsymbol{n}]=0; \quad [\rho v_n H+pD]=0, \qquad (1.24)$$

где $\boldsymbol{n}$ — нормаль к поверхности разрыва, $[f]=f_2-f_1$; f_1 и f_2 — значения функции f перед и за поверхностью разрыва; $v_n=W_n-D$ — нормальная к поверхности разрыва скорость газа в системе координат, связанной с поверхностью разрыва; D — скорость перемещения поверхности разрыва по направлению нормали.

Возможно существование двух типов разрывов: ударных волн ($v_n\neq 0$) и тангенциальных или контактных разрывов ($v_n=0$). В первом случае через поверхность разрыва имеется поток массы газа, а во втором случае поток массы газа отсутствует. В неизобарических струях возникают оба типа разрывов.

Из формул (1.24) следует, что на тангенциальном разрыве $W_{n,1}-D=W_{n,2}-D=0$ и $p_1=p_2$. Таким образом, на поверхности тангенциального разрыва сохраняются нормальная составляющая скорости и давление и могут возникать произвольные разрывы касательной составляющей скорости, плотности и температуры. В реагирующем газе на этой поверхности могут возникать разрывы концентраций компонентов, колебательной энергии и т. д.

На ударной волне имеют место следующие соотношения, называемые условиями Гюгонио:

$$[\varrho v_n]=0; \quad [\varrho v_n^2+p]=0; \quad [\varrho v_n^2/2+h]=0; \quad [W_\tau]=0, \qquad (1.25)$$

где W_τ — скорость, касательная к ударной волне. При заданных условиях перед ударной волной система соотношений (1.25) становится замкнутой, если задать уравнения состояния. Эти уравнения состояния могут соответствовать совершенному газу, а также замороженному или равновесному состоянию газа при переходе через ударную волну. В общем случае неравновесного течения принимается, что на фронте ударной волны течение является замороженным, т. е. релаксационные параметры (концентрации компонентов, колебательные энергии и т. д.) сохраняются неизменными при переходе через ударную волну.

Для расчета сверхзвуковых течений идеального газа используются два подхода. Первый подход заключается в том, что в процессе расчета выделяются образовавшиеся в потоке поверхности разрыва. Области течения между разрывами описываются дифференциальными уравнениями газовой динамики с граничными условиями на поверхностях разрывов. Такой подход позволяет выявить сложную структуру течения и является наиболее точным.

Однако реализация такого подхода при большом числе поверхностей разрыва, взаимодействующих между собой, сложна. Поэтому получил распространение и другой подход, основанный на применении конечно-разностных методов сквозного счета. В этом случае область течения рассчитывается в целом без выделения отдельных поверхностей разрыва, которые «размазываются» искусственной или аппроксимационной вязкостью разностной схемы.

Для расчета неизобарических струйных течений применялись оба подхода, соответствующие численные методы описаны в работе [54]. Наиболее обширная информация о характеристиках течения в струях (см. таблицы работы [52]) была получена с помощью первого подхода с использованием двух методов — метода характеристик и метода сеток. При использовании этих методов решение было получено в точной постановке. Течение в струе делилось на ряд областей, ограниченных поверхностями разрыва, которые находились в процессе расчета.

Рассмотрим вопрос об определяющих параметрах неизобарической струи идеального газа. Для определенности будем считать газы струи и спутного потока совершенными газами. Кроме того, будем считать, что если поток в выходном сечении сопла является неравномерным, то он полностью характеризуется значениями параметров на кромке выходного сечения, которые обозначим индексом «a». Индесом «∞» обозначим параметры в невозмущенном спутном потоке. Схемы течения на начальном участке неизобарической струи идеального газа при различных условиях истечения изображены на рис. 1.11.

Формальный анализ размерностей показывает, что решение задачи о неизобарической струе идеального газа должно зависеть от следующей совокупности безразмерных критериев: γ_a, γ_∞, M_a, M_∞, θ_a, $n=p_a/p_\infty$, W_∞/W_a (или ϱ_∞/ϱ_a, или T_∞/T_a). Однако фактически последний параметр является несущественным.

Действительно, в приближении идеального газа граница струи AC (см. рис. 1.11) является линией тангенциального разрыва, на которой могут иметь разрыв такие величины, как модуль скорости, плотность, температура газа, а статическое давление является непрерывной величиной. Поэтому скорость, плотность и температуру можно привести к безразмерному виду в области собственно струи и в области спутного потока. А именно в области струи — W/W_a, ϱ/ϱ_a, а в области спутного потока — W/W_∞, ϱ/ϱ_∞. Тогда критерий W_∞/W_a (или связанный с ним критерий ϱ_∞/ϱ_a)

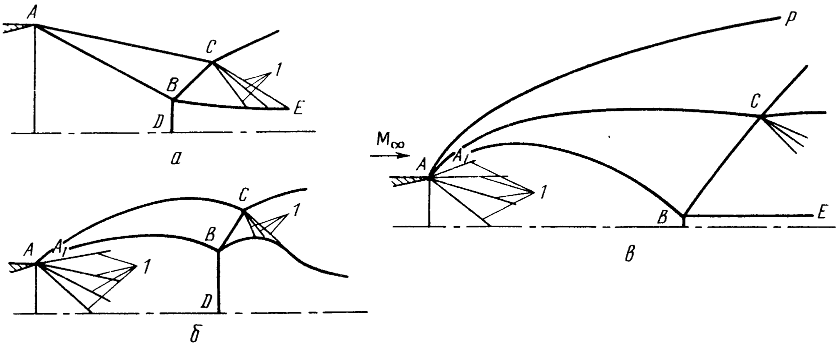


Рис. 1.11. Схемы течения в начальном участке сверхзвуковой неизобарической струи идеального газа:

а — перерасширенная затопленная струя; *б* — недорасширенная затопленная струя, *в* — недорасширенная струя в спутном сверхзвуковом потоке, *АС* — граница струи; *АВ* — падающий скачок; A_1B — висячий скачок, *ВС* — отраженный скачок, *ВД* — центральный скачок; *ВЕ* — тангенциальный разрыв, *АР* — головная ударная волна; *1* — центрированная волна разрежения

становится несущественным и исчезает из числа фактических критериев подобия.

Рассмотрим теперь качественные особенности течения, важные для математической постановки задачи.

В модели идеального газа граница струи является линией тока и одновременно линией тангенциального разрыва. Поэтому на границе струи, положение которой заранее неизвестно и должно определиться в процессе решения задачи, при истечении в затопленное пространство статическое давление полагается равным давлению в окружающей среде, а при истечении в спутный поток граничными условиями являются равенства давлений и углов наклона вектора скорости с обеих сторон границы струи.

Образовавшийся в струе скачок уплотнения (падающий или висячий) ниже по потоку приходит на ось симметрии. Известно, что в случае плоского течения идеального газа в зависимости от интенсивности скачка реализуется либо регулярное отражение от линии симметрии, либо нерегулярное («маховское») отражение. При этом в случае маховского отражения за центральным скачком (диском Маха) этой конфигурации образуется дозвуковое течение.

Анализ уравнений идеального газа показывает, что в случае осесимметричного течения отражение скачка от оси симметрии, строго говоря, всегда должно происходить нерегулярно с образованием дозвукового течения в окрестности оси симметрии.

Течение за отраженным скачком может быть как полностью сверхзвуковым, так и частично дозвуковым. На рис. 1.12 для $\gamma=1{,}4$ показаны границы сверхзвукового режима течения за отраженным скачком. Течение за отраженным скачком в тройной точке является сверхзвуковым, если абсолютное значение угла

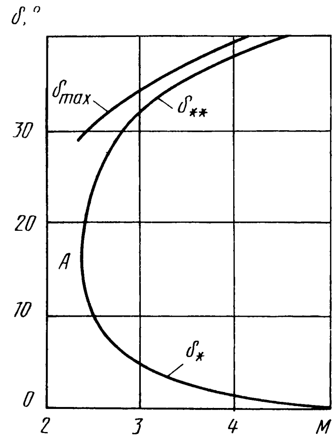


Рис. 1.12. Границы сверхзвукового режима течения за отраженным скачком

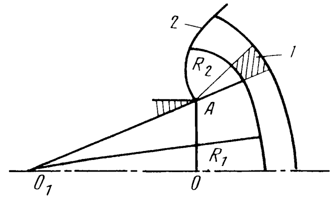


Рис. 1.13. Схема к расчету сильно недорасширенной струи:

1 — ячейка разностной сетки, *2* — граница струи, R_1, R_2 — радиусы окружностей

поворота потока в падающем скачке заключено в диапазоне $\delta_* < |\delta| < \delta_{**}$ (на рис. 1.12 значениям δ_* соответствует кривая, расположенная ниже точки *A*, значениям δ — выше ее). При некотором числе $M_{min}\delta_* = \delta_{**}$ (точка *A* на рис. 1.12) и поэтому при всех $M < M_{min}$ течение за отраженным скачком в тройной точке является дозвуковым независимо от интенсивности падающего скачка. Для $\gamma = 1{,}1$; 1,25; 1,4 и 1,67 значения M_{min} соответственно равны 2,1; 2,23; 2,38 и 2,75.

На рис. 1.12 показаны также значения δ_{max}, соответствующие максимальному углу поворота потока в косом скачке уплотнения. Видно, что при $M > 3$ поток за отраженным скачком может быть дозвуковым только в очень узком диапазоне значений углов наклона падающего скачка.

Поскольку до центрального скачка течение в неизобарической струе является полностью сверхзвуковым, то в этой области стационарные уравнения газовой динамики являются гиперболическими и могут быть численно решены маршевым методом. При этом система координат должна быть выбрана таким образом, чтобы проекция вектора скорости на ее маршевое направление была сверхзвуковой. В широком диапазоне определяющих параметров этому условию удовлетворяет цилиндрическая система координат с направлением оси x (маршевое направление) вдоль оси струи. Однако при большом начальном угле наклона границы струи это условие может нарушиться. На рис. 1.13 показана криволинейная система координат, которая использовалась в работе [19], позволившая рассчитать сильно недорасширенную затопленную струю, когда начальный угол наклона границы струи превышал 90°.

Если рассматривается течение на начальном участке затопленной неизобарической струи в целом (включая область за центральным скачком), то это течение описывается системой уравнений смешанного эллиптическо-гиперболического типа, т. е. задача об определении поля течения сводится к краевой задаче.

В этом случае задачу можно свести к начально-краевой задаче, если решать методом установления с использованием нестационарных уравнений газовой динамики. Однако это увеличивает размерность задачи и для протяженных неизобарических струй (большие степени нерасчетности) задача становится практически нереализуемой при современных возможностях ЭВМ. Возможен подход с разбиением всей интересующей области на две подобласти. В первой из них (до центрального скачка) течение рассчитывается маршевым методом, а во второй — методом установления с использованием результатов для первой подобласти в качестве граничных.

Метод установления практически еще не использовался для расчета сверхзвуковых недорасширенных струй с учетом области течения за центральным скачком. Известны лишь работы (см., например, работу [21]), в которых решена задача о течении в перерасширенной струе при небольшом сверхзвуковом числе Маха сопла, при котором и за отраженным скачком течение является дозвуковым.

Для численного расчета перерасширенных и недорасширенных затопленных струй с учетом центрального скачка Э. А. Ашратовым был разработан метод, основанный на решении краевой задачи в области за центральным скачком в рамках нулевого приближения метода интегральных соотношений. В этом методе [54] принято, что течение за отраженным скачком является полностью сверхзвуковым. Это условие обычно всегда выполняется за исключением перерасширенных струй при относительно небольших числах Маха на выходе сопла таких, что число М перед тройной точкой меньше 3 (см. рис. 1.12).

Вторым существенным моментом указанного метода расчета является предположение о том, что за центральным скачком реализуется течение с переходом через скорость звука.

В перерасширенной струе линия тангенциального разрыва в тройной точке обычно направлена к оси струи и образуется сходящийся канал, в котором быстро ускоряется дозвуковой поток за центральным скачком. В недорасширенной струе линия тангенциального разрыва в тройной точке направлена от оси струи и дозвуковой поток за центральным скачком вначале тормозится. Существенную роль в ускорении этого потока играет центрированная волна разрежения (см. рис. 1.11), образующаяся в точке пересечения отраженного скачка с границей струи. В методе расчета принято, что переход через скорость звука происходит в пределах этой волны разрежения.

Однако с увеличением степени нерасчетности струи отношение давлений в волне разрежения оказывается уже недостаточным, чтобы произошел переход через скорость звука в рассматриваемой области течения. Поэтому при больших степенях нерасчетности переход через скорость звука либо вообще отсутствует, либо происходит дальше вниз по потоку, где становится существенным вязкое перемешивание потоков, разделенных линией тангенциального разрыва.

Предельное значение степени нерасчетности, до которой реализуется принятая схема течения, возрастает с ростом числа M_a на выходе сопла. Так, при $M_a=1$ максимальное значение $n \sim 10^2$, а при $M_a=3$ $n \sim 10^3$.

Эксперименты показали, что при наличии сверхзвукового спутного потока с $M_\infty \geqslant 3$ размер центрального скачка мал и практически не зависит от критериев подобия задачи. В этом случае можно принять следующую модель течения (см. рис. 1.11, *в*). Предполагается, что отражение висячего скачка уплотнения происходит от цилиндрической поверхности малого диаметра BE, окружающей ось симметрии и область с сильным влиянием вязкости. На этой цилиндрической поверхности в качестве граничного условия используется условие непротекания. Можно считать, что в поток вставлена тонкая цилиндрическая трубка, через которую отбирается газ, прошедший через область отражения.

Такая модель течения позволяет использовать во всей области начального участка струи маршевый метод расчета.

При взаимодействии струи со спутным потоком в приближении невязкого газа возможны два режима течения. При не очень больших значениях степени нерасчетности n и небольших углах наклона θ_a вектора скорости к оси на кромке сопла возникает присоединенная ударная волна и реализуется течение, схематически изображенное на рис. 1.11, *в*.

При больших степенях нерасчетности начальный угол наклона границы струи на кромке сопла может стать больше максимального угла поворота потока в косом скачке уплотнения и возникнет течение с отошедшей ударной волной, за которой течение является смешанным (до- и сверхзвуковым).

В этом случае решение целесообразно находить раздельно для области смешанного до- и сверхзвукового течения и области чисто сверхзвукового течения. В ближней к соплу зоне, включающей минимальную область влияния для потока за отошедшей ударной волной, решение может быть найдено методом установления, после чего маршевым методом находится решение стационарных уравнений для сверхзвуковой области.

При численном расчете неизобарических спутных струй обычно предполагается, что поток перед головным скачком уплотнения в спутном потоке является невозмущенным, т. е. не учитывается обтекание ЛА. При образовании отошедшей ударной волны возможны две ситуации: расстояние отхода ударной волны от кромки выходного сечения сопла больше или меньше длины ЛА.

В первом случае необходимо рассматривать течение с отошедшей ударной волной, возникающей перед конфигурацией летательный аппарат + струя. Во втором случае течение, построенное в приближении идеального газа, может существенно отличаться от реального, из-за образования в последнем значительной зоны отрыва пограничного слоя на корпусе ЛА.

В подразд. 3.1.1 рассмотрены две приближенные модели течения, применявшиеся для расчета струй при больших степенях нерасчетности.

1.2.3. Модели ламинарного течения вязкого газа в неизобарической струе

В строгой постановке анализа влияния вязкости на структуру течения в сверхзвуковых неизобарических струях необходимо применение так называемой полной системы уравнений Навье—Стокса. Эта система уравнений позволяет учесть все сложные особенности течения в начальном участке неизобарической струи: его ударно-волновую структуру, существование вязкого слоя смешения и его взаимодействие с областью невязкого течения, взаимодействие струи с внешним потоком с образованием области отрыва и т. д.

Будем рассматривать ламинарное течение вязкого теплопроводного сжимаемого газа без физико-химических процессов, диффузии и конденсированной фазы. Используя соотношения (1.1) ... (1.3), запишем систему уравнений Навье—Стокса для двумерного течения:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t}+\frac{\partial \varrho u}{\partial x}+\frac{\partial \varrho v}{\partial y}+\frac{\nu}{y}\varrho v=0; \qquad (1.26)$$

$$\varrho\frac{du}{dt}+\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial \pi_{11}}{\partial x}+\frac{\partial \pi_{12}}{\partial y}+\frac{\nu}{y}\pi_{12}; \qquad (1.27)$$

$$\varrho\frac{dv}{dt}+\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial \pi_{21}}{\partial x}+\frac{\partial \pi_{22}}{\partial y}+\frac{\nu}{y}(\pi_{22}-\pi_{33}); \qquad (1.28)$$

$$\varrho\frac{dh}{dt}-\frac{dp}{dt}=\frac{\partial}{\partial x}\lambda\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\lambda\frac{\partial T}{\partial y}+\frac{\nu}{y}\lambda\frac{\partial T}{\partial y}+\mu\Phi. \qquad (1.29)$$

Здесь $\nu=0$ или 1 для плоского или осесимметричного течения соответственно; x, y — декартовы или цилиндрические координаты; π_{jk} — составляющие тензора вязких напряжений Π; Φ — диссипативная функция, причем

$$\pi_{11}=\mu\left(\frac{4}{3}\,\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\,\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\,\frac{\nu}{y}v\right);$$

$$\pi_{12}=\pi_{21}=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right);$$

$$\pi_{22}=\mu\left(\frac{4}{3}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\frac{\nu}{y}v\right);$$

$$\pi_{33}=\mu\left(\frac{4}{3}\frac{v}{y}-\frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\frac{\partial v}{\partial y}\right);$$

$$\Phi=2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\nu\left(\frac{v}{y}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2-$$

$$-\frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\nu\frac{v}{y}\right)^2.$$

Для стационарного течения ($\partial/\partial t\equiv0$) система уравнений Навье—Стокса принадлежит к эллиптическому типу, для которого корректной является краевая задача. На рис. 1.14 схематически изображена рассчитываемая область течения. В силу симметрии течения решение ищется только в верхней полуплоскости, ограниченной сверху поверхностью BC, расположенной от оси (плоскости) симметрии на достаточном удалении, чтобы там можно было использовать условия на бесконечности (т. е. при истечении струи в затопленное пространство — условия в окружающей неподвижной среде, а при истечении в спутный поток — условия в невозмущенном спутном потоке).

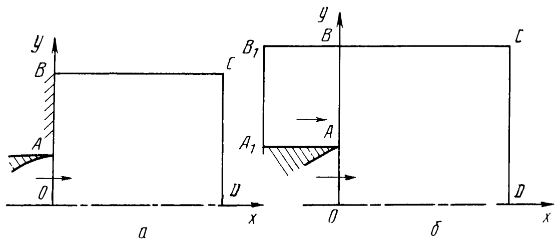


Рис. 1.14. Границы расчетной области. Пояснения даны в тексте

На оси (плоскости) симметрии задаются условия симметрии

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial \rho}{\partial y}=\frac{\partial T}{\partial y}=v=0.$$

На границе CD нельзя сформулировать строгие условия исходя из физической постановки задачи. В конечном сечении обычно задаются так называемые «мягкие условия», означающие равенство нулю продольных производных искомых функций. При этом путем варьирования координаты x_k конечного сечения необходимо в процессе решения убедиться в практической независимости результатов от x_k.

С левой стороны рассматриваемая область ограничивается выходным сечением сопла OA, в котором известны параметры потока, и поверхностью AB. При истечении струи в затопленное пространство (см. рис. 1.14, *а*) AB считается твердой стенкой, на которой задаются условия прилипания и температура стенки.

При истечении в сверхзвуковой спутный поток (см. рис. 1.14,*б*) на *AB* задаются параметры невозмущенного спутного потока, в том числе и с учетом образующегося на корпусе ЛА пограничного слоя. При больших степенях нерасчетности взаимодействие струи со спутным потоком может приводить к отрыву пограничного слоя на корпусе *ЛА*. Чтобы учесть это явление, левую границу области необходимо сместить вверх по потоку до некоторого сечения $A_1 B_1$, в котором можно пренебречь влиянием струи на спутный поток.

Аналогичная ситуация имеет место и при истечении недорасширенной струи в дозвуковой спутный поток при любом значении степени нерасчетности.

Применение полной системы уравнений Навье—Стокса для расчета течения в неизобарических струях не получило широкого распространения из-за большой трудоемкости и ограниченных возможностей существующих ЭВМ. Известны две работы [31, 32], в которых методом установления с помощью неявной разностной схемы расщепления решена рассматриваемая краевая задача для полной системы уравнений Навье—Стокса. В первой из них рассчитано истечение осесимметричной ламинарной неизобарической струи совершенного газа в затопленное пространство при следующих значениях определяющих параметров: $\gamma_a=1{,}4$, $\mathrm{Pr}=0{,}71$, $T_a/T_\infty=1$ и 10. Числа M_a, Re_a и степень нерасчетности n варьировались в диапазонах $1\leqslant M_a\leqslant 4$, $20\leqslant \mathrm{Re}_a\leqslant 10^5$, $0{,}5\leqslant n\leqslant 10^3$ соответственно.

Во второй работе тем же методом рассчитано истечение осесимметричной ламинарной неизобарической струи в спутный поток при $\gamma_a=\gamma_\infty=1{,}4$, $\mathrm{Pr}=0{,}71$, $M_a=2$, $n=10$, $0\leqslant M_\infty\leqslant 6$, $50\leqslant \mathrm{Re}_a\leqslant 10^4$, $1\leqslant T_a/T_\infty\leqslant 8$.

Из результатов этих работ следует, что при принятой в расчетах густоте разностной сетки даже при больших числах Рейнольдса наблюдается значительное размазывание ударных волн аппроксимационной вязкостью разностной схемы. Например, даже при $\mathrm{Re}_a=10^3$ и $M_a=1$ отражение размазанного висячего скачка от оси струи происходит регулярным образом без образования диска Маха, что не согласуется с экспериментальными данными.

Из-за ограничений, накладываемых памятью современных ЭВМ, пока затруднительно получить удовлетворительные результаты по описанию структуры течения в сильно недорасширенных струях в рамках полных уравнений Навье—Стокса.

Сложность решения полной системы уравнений Навье—Стокса стимулировала разработку и применение упрощенных математических моделей течения вязкого сжимаемого газа. Упрощение исходных уравнений Навье—Стокса основано на предположении о том, что толщина области течения, в которой вязкость и теплопроводность играют существенную роль, а также величина нормальной к основному направлению потока составляющей скорости имеют порядок $O(1/\sqrt{\mathrm{Re}})$. Предполагая, что число Re, построенное по характерным параметрам течения, велико, проводится оценка каждого члена в уравнениях Навье—Стокса и выделяются члены порядка $O(1)$, $O(1/\sqrt{\mathrm{Re}})$, $O(1/\mathrm{Re})$ и т. д. При сохранении всех членов порядка $O(1)$ и исключении тех или иных членов порядка $O(1/\sqrt{\mathrm{Re}})$ и высших получают различные приближения уравнений сжимаемого вязкого теплопроводного газа.

Сохраняя в исходных уравнениях Навье—Стокса члены порядка $O(1)$ и отбрасывая все члены высшего порядка, получают систему уравнений пограничного слоя.

Уравнения пограничного слоя в случае стационарного течения можно записать в следующей форме

$$\frac{\partial \varrho u}{\partial x}+\frac{\partial \varrho v}{\partial y}+\nu\frac{\varrho v}{y}=0;$$

$$\varrho u\frac{\partial u}{\partial x}+\varrho v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{1}{y^{\nu}}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^{\nu}\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right); \tag{1.30}$$

$$\varrho u\frac{\partial h}{\partial x}+\varrho v\frac{\partial h}{\partial y}-u\frac{\partial p}{\partial x}-v\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{1}{y^{\nu}}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^{\nu}\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2;$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=0. \tag{1.31}$$

Эта система пригодна лишь для течения в слое смешения. Однако если заменить уравнение (1.31) на уравнение количества движения для поперечной составляющей скорости из уравнений Эйлера

$$\varrho u\frac{\partial v}{\partial x}+\varrho v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial y}=0, \tag{1.32}$$

то получим модель, справедливую для описания течения как в области слоя смешения, так и во внешних областях невязкого течения. В задачах обтекания тел уравнения, аналогичные (1.30), (1.32), но записанные в естественной системе координат, связанной с контуром тела, носят название *уравнений вязкого ударного слоя.*

При сохранении в уравнениях Навье—Стокса членов порядка $O(1)$ и $O(1/\sqrt{\mathrm{Re}})$ получают следующее приближение — так называемые обобщенные уравнения Прандтля, которые здесь не приводятся.

Другой подход к упрощению уравнений Навье—Стокса состоит в том, что в исходных уравнениях отбрасываются все вторые (повторные и смешанные) производные вдоль потока. Такое упрощение, которое носит название *параболического приближения*, допустимо, когда поперечные градиенты намного превышают продольные.

Уравнения параболического приближения для двумерного течения имеют вид:

$$\frac{\partial \varrho u}{\partial x}+\frac{\partial \varrho v}{\partial y}+\nu\frac{\varrho v}{y}=0; \tag{1.33}$$

$$\varrho u\frac{\partial u}{\partial x}+\varrho v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{1}{y^{\nu}}\frac{\partial}{\partial y}y^{\nu}\mu\frac{\partial u}{\partial y}; \tag{1.34}$$

$$\varrho u\frac{\partial v}{\partial x}+\varrho v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial y}\mu\frac{\partial v}{\partial y}+$$

$$+\nu\left[2\mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v}{y}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu v}{y}\right)\right]; \tag{1.35}$$

$$\varrho u\frac{\partial h}{\partial x}+\varrho v\frac{\partial h}{\partial y}-u\frac{\partial p}{\partial x}-v\frac{\partial p}{\partial y}=$$

$$=\frac{1}{y^{\nu}}\frac{\partial}{\partial y}y^{\nu}\lambda\frac{\partial T}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{2}. \tag{1.36}$$

Уравнение энергии (1.36) получается из исходного уравнения (1.29) не только путем отбрасывания вторых производных по x и смешанных производных, но и замены диссипативной функции $\mu\Phi$ на $\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{2}$. Часто вместо уравнения энергии в форме (1.36) используют уравнение для полной энтальпии

$$\varrho u\frac{\partial H}{\partial x}+\varrho v\frac{\partial H}{\partial y}=\frac{1}{y^{\nu}}\frac{\partial}{\partial y}y^{\nu}\mu\left[\frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial H}{\partial y}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(1-\mathrm{Pr}^{-1})\frac{\partial u^{2}}{\partial y}+\frac{2}{3}\left(1-\frac{3}{4}\mathrm{Pr}^{-1}\right)\frac{\partial v^{2}}{\partial y}\right]-\frac{2}{3}\frac{\nu}{y}\frac{\partial}{\partial y}\mu v^{2}. \tag{1.37}$$

Если в газе происходят химические реакции, то к системе (1.33) ... (1.36) необходимо добавить уравнения для массовых концентраций компонентов и учесть в уравнении энергии диффузионный перенос энергии:

$$\varrho u\frac{\partial c_i}{\partial x}+\varrho v\frac{\partial c_i}{\partial y}=F_i+\frac{1}{y^{\nu}}\frac{\partial}{\partial y}y^{\nu}\frac{\mu}{\mathrm{Sc}}\frac{\partial c_i}{\partial y}\ (i=1,\ldots,N); \tag{1.38}$$

$$\varrho u\frac{\partial H}{\partial x}+\varrho v\frac{\partial H}{\partial y}=\frac{1}{y^{\nu}}\frac{\partial}{\partial y}y^{\nu}\mu\left[\frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial H}{\partial y}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(1-\mathrm{Pr}^{-1})\frac{\partial u^{2}}{\partial y}+\frac{2}{3}\left(1-\frac{3}{4}\mathrm{Pr}^{-1}\right)\frac{\partial v^{2}}{\partial y}\right]-$$

$$-\frac{2}{3}\frac{\nu}{y}\frac{\partial}{\partial y}\mu v^{2}+\frac{1}{y^{\nu}}\frac{\partial}{\partial y}y^{\nu}\frac{\mu}{\mathrm{Pr}}(\mathrm{Le}-1)\sum_{i=1}^{N}h_i\frac{\partial c_i}{\partial y} \tag{1.39}$$

Здесь введены для смеси числа Льюиса $\mathrm{Le}=\mathrm{Pr}/\mathrm{Sc}$. Шмидта $\mathrm{Sc}=\mu/\rho D_{12}$ (смесь считается бинарной) и Прандтля $\mathrm{Pr}=\mu c_p/\lambda$.

Параболическое приближение по точности занимает промежуточное положение между уравнениями вязкого ударного слоя и обобщенными уравнениями Прандтля, так как в уравнениях отсутствует часть членов порядка $O(1/\sqrt{\mathrm{Re}})$, но сохранены члены более высокого порядка малости.

Параболическое приближение широко используется для численного расчета стационарных сверхзвуковых течений. Для стационарных сверхзвуковых течений уравнения параболического приближения являются эволюционными относительно продольной координаты. Это дает возможность находить решение этих уравнений (как впрочем и уравнений вязкого ударного слоя) маршевым методом, что позволяет существенно сократить затраты машинного времени и памяти ЭВМ по сравнению с решением полных уравнений Навье—Стокса методом установления.

При наличии областей с дозвуковыми скоростями, например при истечении струи в спутный дозвуковой поток, задача Коши, поставленная для параболизованной системы уравнений Навье—Стокса, является некорректной, что приводит к неустойчивости маршевых методов. В последние годы предложен ряд способов «регуляризации» этой задачи, позволяющих использовать маршевые методы для решения внешних и внутренних задач с обширными дозвуковыми областями. Однако к расчету неизобарических струй с дозвуковыми областями течения эти способы пока не применялись.

При сквозном счете образующихся в неизобарической струе ударных волн целесообразно использовать (особенно при достаточно больших степенях нерасчетности) параболическое приближение уравнений Навье—Стокса, записанных в дивергентной форме, обеспечивающей выполнение законов сохранения на разрывах:

$$\frac{\partial \varrho u}{\partial x}+\frac{\partial \varrho v}{\partial y}=-\frac{\nu}{y}\varrho v;$$

$$\frac{\partial(\varrho u^2+p)}{\partial x}+\frac{\partial \varrho uv}{\partial y}=-\frac{\nu}{y}\varrho uv+\frac{1}{y^\nu}\frac{\partial}{\partial y}y^\nu\mu\frac{\partial u}{\partial y};$$

$$\frac{\partial \varrho uv}{\partial x}+\frac{\partial(\varrho v^2+p)}{\partial y}=-\frac{\nu}{y}\varrho v^2+\frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial y}\mu\frac{\partial v}{\partial y}+$$

$$+\nu\left[2\mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v}{y}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu v}{y}\right)\right]; \qquad (1.40)$$

$$\frac{\partial \varrho uH}{\partial x}+\frac{\partial \varrho vH}{\partial y}=-\frac{\nu}{y}\varrho vH+\frac{1}{y^\nu}\frac{\partial}{\partial y}y^\nu\mu\left[\frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial H}{\partial y}+\frac{1}{2}(1-\mathrm{Pr}^{-1})\frac{\partial u^2}{\partial y}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{3}\left(1-\frac{3}{4}\mathrm{Pr}^{-1}\right)\frac{\partial v^2}{\partial y}\right]-\frac{2}{3}\frac{\nu}{y}\frac{\partial}{\partial y}\mu v^2+\frac{1}{y^\nu}\frac{\partial}{\partial y}y^\nu\frac{\mu}{\mathrm{Pr}}(\mathrm{Le}-1)\sum_{i=1}^{N}h_i\frac{\partial c_i}{\partial y};$$

$$\frac{\partial \varrho u c_i}{\partial x}+\frac{\partial \varrho v c_i}{\partial y}=-\frac{\nu}{y}\varrho v c_i+F_i+\frac{1}{y^{\nu}}\frac{\partial}{\partial y}y^{\nu}\frac{\mu}{\mathrm{Sc}}\frac{\partial c_i}{\partial y}\,(i=1,\ \ldots,\ N).$$

Лежащее в основе параболизации уравнение Навье—Стокса допущение $\partial/\partial y \gg \partial/\partial x$ справедливо при небольших углах между направлением потока в слое смешения и осью струи, которые характерны для струй с небольшими степенями нерасчетности. Поэтому при больших степенях нерасчетности $n \gg 1$ параболическое приближение можно корректно записать только в системе координат, естественно связанной с геометрией вязкого слоя смешения.

Одним из способов реализации такого подхода является переход от цилиндрической системы координат к так называемым естественным координатам, связанным с длиной дуги s вдоль линии тока и длиной n нормали к ней.

Подчеркнем, что естественные координаты не образуют систему координат в обычном смысле, так как линии тока не являются кривыми, вдоль которых величина n постоянна, на ортогональных к ним линиях величина s также непостоянна, а дифференциалы ds и dn не являются полными дифференциалами. Записанные с их помощью дифференциальные соотношения без учета коэффициентов Лямэ нельзя рассматривать как дифференциальные уравнения в частных производных. Это всего лишь связь между производными искомых функций по направлению вдоль линии тока и по нормали к ней. Тем не менее при разумной аппроксимации линий тока на каждом шаге по продольной координате эти дифференциальные соотношения в координатах s, n или даже непосредственная аппроксимация законов сохранения в пределах элементарной ячейки $(s+ds,\ s,\ n+dn,\ n)$ могут служить основой для численного метода, как это реализовано, например, в работах [64, 71].

В работе [11] выведены параболизованные уравнения Навье—Стокса, записанные в заранее неизвестной криволинейной ортогональной системе координат x_1, x_2, связанной с линиями тока. Так как метрика координат неизвестна, то одних уравнений механики сплошной среды недостаточно для формулирования полной системы уравнений. Поэтому к ним добавляются соотношения дифференциальной геометрии. Заметим, что этот подход пока еще не получил практического воплощения.

Опубликованные результаты численного моделирования течений в осесимметричных сверхзвуковых недорасширенных струях вязкого газа, истекающих в сверхзвуковой спутный поток [9, 10, 33, 38], получены с использованием уравнений параболического приближения, записанных в цилиндрической системе координат в диапазоне значений степени нерасчетности $n \leqslant 10^3$.

1.2.4. Модели турбулентного течения вязкого газа в неизобарической струе

Приведенные в подразд. 1.2.3 математические модели справедливы при ламинарном режиме течения в слое смешения неизобарической струи.

Вообще говоря, система уравнений (1.26) ... (1.29) определяет мгновенные значения переменных и в турбулентном режиме. Для заданных граничных условий можно было бы попытаться найти решения этой системы, а затем усреднить их по всей совокупности реализаций. Однако такое прямое моделирование пока еще невозможно из-за ограниченных возможностей ЭВМ.

Для исследования турбулентных течений применяется другой подход, основанный на использовании системы уравнений для усредненных значений пульсирующих переменных. Обычно используют два вида усреднения. Предполагается, что любая пульсирующая величина f может быть представлена в виде

$$f=\bar{f}+f'=\tilde{f}+f''.$$

Здесь $\bar{f}=(\lim\limits_{\Delta t\to\infty}\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t} f(t)dt)/\Delta t$ — обычное временное усреднение, а $\tilde{f}=\overline{\rho f}/\bar{\rho}$ — массово взвешенное. Между ними существует связь $\tilde{f}=\bar{f}+\overline{\rho' f'}/\bar{\rho}$.

Для течений с переменной плотностью удобно использовать оба типа усреднения, так как это упрощает запись и анализ уравнений. Величины ρ и p усредняются обычным образом, а для $\boldsymbol{W}$, e, h, T, c_i используется массово взвешенное усреднение.

Система уравнений усредненного турбулентного движения является незамкнутой, поскольку содержит в правых частях неизвестные корреляционные величины, выражающиеся через пульсационные характеристики течения. Эти корреляции характеризуют собой усредненную скорость переноса количества движения, энергии и массы компонентов и, таким образом, обусловливают дополнительные величины напряжения трения $\boldsymbol{\Pi}_{\text{т}jk}=-\bar{\rho}\,\widetilde{W_j'' W_k''}$ векторов потоков теплоты $\boldsymbol{q}_{\text{т}}=\bar{\rho}\widetilde{\boldsymbol{W}''h''}$ и массы $\boldsymbol{I}_{\text{т}i}=\bar{\rho}\widetilde{\boldsymbol{W}''c_i''}$, связанные с пульсационным движением.

Ввиду незавершенности статистической теории турбулентности замыкание системы уравнений усредненного турбулентного движения при расчетах струй в настоящее время производится на основе феноменологического подхода и в основном с использованием полуэмпирических моделей для вторых корреляций. Такие полуэмпирические модели в большинстве строятся на градиентной концепции Буссинеска о пропорциональности потока Q свойства Φ (количества движения, энергии, массы) градиенту этого свойства $\partial\Phi/\partial y$. Данная концепция имеет некоторое качественное обоснование с точки зрения статистического подхода.

Действительно, если рассматривается турбулентный перенос, то вместо понятия о межмолекулярных столкновениях, можно ввести представление о турбулентном обмене между элементами (молями) жидкости. Аналогично этому скорость теплового движения следует заменить на скорость турбулентных движений. Если эти хаотические турбулентные движения должны обеспечивать перенос свойства Ф, то, ограничиваясь только случаем мелкомасштабных перемещений молей, по аналогии с молекулярно-кинетической теорией турбулентный поток можно представить в виде

$$Q=\bar{\rho}\overline{\Phi''v''}=\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial y},$$

где v'' — скорость турбулентного движения вдоль оси y,

α — турбулентный коэффициент переноса (или турбулентного обмена) свойства Ф.

В общем случае коэффициент обмена α зависит от многих факторов, в число которых входит интенсивность (энергия турбулентности) и масштаб турбулентных пульсаций, а также свойство Ф. Так, значение этого коэффициента различно для случаев переноса количества движения, теплоты и вещества.

В простейшем случае турбулентного переноса в одном направлении (скажем, в направлении оси y) напряжение трения $\mathbf{П}_т$, потоки теплоты $\boldsymbol{q}_т$ и массы $\boldsymbol{I}_{тi}$ в соответствии с градиентной концепцией следующим образом выражаются через усредненные величины:

$$\begin{aligned} \mathbf{П}_т&=-\bar{\rho}\overline{u''v''}=\mu_т\partial\tilde{u}/\partial y=\rho\varepsilon_т\partial\tilde{u}/\partial y;\\ \boldsymbol{q}_т&=\bar{\rho}\overline{v''h''}=-\lambda_т\partial\tilde{T}/\partial y;\\ \boldsymbol{I}_{тi}&=\bar{\rho}\overline{v''c_i''}=-D_{тi}\partial\tilde{c}_i/\partial y. \end{aligned} \qquad (1.41)$$

Здесь $\mu_т$ и $\varepsilon_т$ — динамический и кинематический коэффициенты турбулентной вязкости; $\lambda_т$ и $D_{тi}$ — коэффициенты турбулентной теплопроводности и диффузии. В общем случае турбулентные составляющие тензора напряжений $\mathbf{П}_{тjk}$, векторы потока теплоты $\boldsymbol{q}_т$ и потока массы $\boldsymbol{I}_т$ вводятся с использованием турбулентных аналогов законов Ньютона, Фурье и Фика.

Важно отметить, что градиентная концепция Буссинеска наиболее адэкватно отражает процессы переноса, обусловленные турбулентными пульсациями малого масштаба. Для пульсаций крупного масштаба определяющим фактором должно быть само свойство в целом, а не местный его градиент. Именно этой причиной в основном и объясняется ограничение диапазона условий применимости различных полуэмпирических моделей, использующих соотношения для $\mathbf{П}_т$, $\boldsymbol{q}_т$, $\boldsymbol{I}_т$ типа (1.41). Тем не менее данные соотношения благодаря их традиционно удобной форме, а также из-за отсутствия более адэкватных в настоящее время широко используются для расчетов струйных течений и при удачном подборе эмпирических постоянных позволяют получать вполне приемлемые по точности решения практических задач.

Эксперименты подтверждают качественные соображения статистического подхода о том, что процессы переноса количества движения, теплоты и массы при турбулентном переносе тесно связаны друг с другом. Эта связь находит свое отражение в том, что отношения $\mu_т c_p/\lambda_т$ и $\mu_т/(\rho D_т)$, называемые турбулентными числами Прандтля $\mathrm{Pr}_т$ и Шмидта $\mathrm{Sc}_т$, оказываются приближенно постоянными и близкими к единице.

Разумеется, эмпирический способ введения $\mu_т$, $\lambda_т$ и $D_т$ обусловливает и эмпирический характер $\mathrm{Pr}_т$, $\mathrm{Sc}_т$.

Приведем систему уравнений в параболическом приближении, описывающих турбулентное течение в неизобарических струях с учетом химических реакций. Черту над усредненными величинами для простоты опустим

$$\frac{\partial \varrho u}{\partial x}+\frac{\partial \varrho v}{\partial y}=-\frac{\nu}{y}\varrho v;$$

$$\frac{\partial(\varrho u^2+p)}{\partial x}+\frac{\partial \varrho u v}{\partial y}=-\frac{\nu}{y}\varrho u v+\frac{1}{y^\nu}\frac{\partial}{\partial y}y^\nu\mu_т\frac{\partial u}{\partial y};$$

$$\frac{\partial(\varrho u v)}{\partial x}+\frac{\partial(\varrho v^2+p)}{\partial y}=-\frac{\nu}{y}\varrho v^2+\frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial y}\mu_т\frac{\partial v}{\partial y}+$$

$$+\nu\left[2\mu_т\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v}{y}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu_т v}{y}\right)\right]; \qquad (1.42)$$

$$\frac{\partial \varrho u H}{\partial x}+\frac{\partial \varrho v H}{\partial y}=-\frac{\nu}{y}\varrho v H+\frac{1}{y^\nu}\frac{\partial}{\partial y}y^\nu\mu_т\left[\frac{1}{\mathrm{Pr}_т}\frac{\partial H}{\partial y}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(1-\mathrm{Pr}_т^{-1})\frac{\partial u^2}{\partial y}+\frac{2}{3}\left(1-\frac{3}{4}\mathrm{Pr}_т^{-1}\right)\frac{\partial v^2}{\partial y}\right]-$$

$$-\frac{2}{3}\frac{\nu}{y}\frac{\partial}{\partial y}\mu_т v^2+\frac{1}{y^\nu}\frac{\partial}{\partial y}y^\nu\frac{\mu_т}{\mathrm{Pr}_т}(\mathrm{Le}_т-1)\sum_{i=1}^{N}h_i\frac{\partial c_i}{\partial y};$$

$$\frac{\partial \varrho u c_i}{\partial x}+\frac{\partial \varrho v c_i}{\partial y}=-\frac{\nu}{y}\varrho v c_i+F_i+\frac{1}{y^\nu}\frac{\partial}{\partial y}y^\nu\frac{\mu_т}{\mathrm{Sc}_т}\frac{\partial c_i}{\partial y}\quad (i=1,\ldots,N).$$

При выводе этих уравнений предполагалось, что молекулярным переносом можно пренебречь по сравнению с турбулентным.

Для определения функциональной зависимости коэффициентов турбулентного переноса $\mu_т$, $\lambda_т$ и $D_т$ от макроскопических параметров газового потока используются соображения физического характера. При этом соответствующие различным соображениям модели могут быть разделены на два типа — локальные модели, в которых коэффициенты переноса выражаются через местные газодинамические параметры (плотность ρ, температуру T, скорость W, масштаб Λ), и модели, в которых путем построения дифференциальных соотношений для коэффициента $\mu_т$, энергии турбулентности $e_т$ ($\mu_т \sim \sqrt{e_т}$), масштаба Λ, скорости диссипации $k_т$ турбулентной энергии учитывается предыстория развития турбулентного течения. Для связи между $\mu_т$, $e_т$ и $k_т$ используется соотношение Колмогорова $\mu_т \sim \rho e_т / k_т$. Число соответствующих соотношений выбирается различным. Величины $\lambda_т$ и $D_т$ определяются через $\mu_т$ с помощью чисел $Pr_т$ и $Sc_т$, относительно которых делаются дополнительные предположения.

Первыми были разработаны локальные модели. К ним, в первую очередь, относятся теории пути смешения и постоянства коэффициента турбулентного обмена, предложенные Прандтлем, и теория переноса завихренности Тейлора. Многочисленные экспериментальные проверки и теоретические дискуссии, посвященные выявлению преимуществ какой-либо из этих моделей, фактически не привели к однозначному ответу. Соответствие этих моделей опытным данным для широкого класса турбулентных течений (пограничные слои, струи, следы) имеет весьма изменчивый характер, так как в одних случаях лучшие результаты дает одна модель, а в других — другая.

Применительно к расчетам струйных течений наибольшее распространение получила так называемая вторая формула Прандтля для $\mu_т$, отражающая предположение о постоянстве коэффициента турбулентного обмена поперек струи. Она имеет вид

$$\mu_т = \varkappa \rho \,|\, W_e - W_i \,|\, \Lambda. \qquad (1.43)$$

Здесь W_e и W_i — величины максимальной и минимальной скорости по обе стороны слоя смешения; $\varkappa$ — эмпирическая константа, определяемая опытным путем; Λ — масштаб турбулентности, полагаемый равным ширине δ вязкой зоны течения в данном сечении (часто принимают $\Lambda = \delta/2$). Таким образом, здесь $\mu_т$ в основном определяется локальными параметрами потока. Однако предположением $\Lambda \sim \delta$ некоторым образом также учитывается и предыстория течения.

Сравнения расчетов, использующих эту формулу, с данными экспериментов показали [58], что для изобарических дозвуковых струй, температурный режим которых близок к изотермическому, а молекулярные массы смешивающихся газов не слишком сильно отличаются, имеется вполне хорошее соответствие. Эта формула, однако, не обеспечивает полного учета более сложных процессов турбулентного перемешивания, обусловленных характеристиками течения вверх по потоку, эффектами сжимаемости газа, взаимодействием между крупными и мелкими вихрями и другими эффектами.

Для обеспечения соответствия данных расчета опытным данным для различных условий подбираются соответствующие значения эмпирической константы $\varkappa$. В настоящее время значения, полученные для $\varkappa$, в различных работах колеблются в диапазоне от 0,01 до 0,03. При этом значения $\varkappa$ оказываются различными для различных типов течения. Например, для согласования расчетов с опытами значения $\varkappa$ для начального участка струи приходится принимать примерно в два раза меньшими, чем для основного участка. Различные значения $\varkappa$ требуется принимать для плоского и осесимметричного случаев. Существенное влияние на величину $\varkappa$ оказывают и эффекты сжимаемости газа.

По мере накопления экспериментального материала предлагались различные модификации формулы (1.43).

В работе [9] на основе анализа экспериментальных данных для затопленных струй и данных для течения в следах предложена следующая модификация формулы для $\mu_т$:

$$\mu_т = 0{,}014 \varrho W_i \big|_{x=0} \Delta r^* \varphi^k \left[(1 + \Delta r^*/r^*) + |1 - m_a| (\Delta r^*/r^*) \right] + \mu, \quad (1.44)$$

где

$$k = 0{,}5 - 0{,}3 \sqrt{m_a/(1+m_a)}; \quad \varphi = (W_i - W_e)/(W_i|_{x=0} - W_e);$$

μ — молекулярная вязкость; W_i — скорость на оси; $\Delta r^* = |y_{0,2} - y_{0,8}|$ ($y_{0,2}$ равно значению y в той точке, где $W = W_e + 0{,}2(W_i - W_e)$, $y_{0,8}$ определяется аналогично); $r^* = y_{0,8}$. В начальном сечении при $x=0$ $m_a = (W_e/W_i)|_{x=0}$. Для полностью развитого автомодельного профиля скорости на основном участке струи $\Delta r^* = r^*$, а на начальном участке Δr^* представляет собой ширину слоя смешения.

На основном участке струи $\Delta r^* = r^*$ и при $k=1$ формула (1.44) сводится к формуле Прандтля. При $k=0$ значение $\mu_т$ зависит только от начальной разности скоростей $(W_i - W_e)|_{x=0}$ и не зависит от соответствующей текущей разности.

Из сравнения расчетов с экспериментальными данными следует, что для затопленных струй ($m_a=0$) $k=0{,}5$, а для следов ($m_a>1$) $k=0{,}2$. Автор отмечает необходимость уточнения формулы (1.44) по мере накопления новых экспериментальных данных.

С. Дональдсоном и Р. Греем (1966 г.) предложена другая модификация формулы Прандтля, состоящая в замене эмпирической константы $\varkappa$ на эмпирическую функцию, зависящую от числа Маха в следующем виде:

$$\mu_т = 0{,}5 k \varrho |W_i - W_e| \delta, \quad (1.45)$$

при $M_{0,5} \leqslant 1{,}2$ $k = 0{,}046 + M_{0,5}(0{,}0256 M_{0,5}^2 - 0{,}046 M_{0,5})$,

при $M_{0,5} > 1{,}2$ $k = 0{,}0248$.

Необходимо отметить, что различные модификации формулы Прандтля (1.43) кардинальных улучшений с точки зрения согласования результатов расчета с опытными данными в широком диапазоне изменения всех параметров не внесли. Это выявилось особенно отчетливо после появления в литературе ряда экспериментальных работ (см., например, [58, 74]), в которых детально исследовалось течение в сверхзвуковых изобарических струях, истекающих в затопленное пространство из сопл с числами $M_a \leqslant 2{,}4$. В этих исследованиях было, например, установлено существенное увеличение длины начального участка изобарической струи при увеличении M_a. В то же время в расчетах, проведенных Ф. С. Завелевичем с использованием формул (1.43) ... (1.45), такой зависимости не было получено. Этим было показано, что при появлении эффектов сжимаемости эти формулы оказываются недостаточно точными. Поэтому поиски наиболее адэкватных соотношений для $\mu_т$ должны быть продолжены.

Использование же формул (1.43) ... (1.45) пока по-прежнему требует подбора эмпирической константы $\varkappa$ для тех или иных конкретных условий течения.

В моделях второго типа, приведенных в работах Г. С. Глушко, А. Н. Секундова, Б. Е. Лаундера и Д. Б. Сполдинга, называемых в литературе дифференциальными моделями, учет таких эффектов, как предыстория течения, порождение и диссипация энергии турбулентных пульсаций, переменность масштаба турбулентности и взаимодействие больших и малых вихрей осуществляется построением дифференциальных уравнений для основных параметров турбулентности. В зависимости от необходимости иметь ту или иную полноту описания и для упрощения дифференциальные уравнения записываются для одной, двух или трех основных характеристик турбулентности ($e_т$, Λ, $k_т$). При этом получаются так называемые одно-, двух- и трехпараметрические модели. Применение таких моделей к течениям в неизобарических струях пока довольно ограничено.

В работах [10, 33] система усредненных уравнений замыкалась с помощью уравнения переноса для кинематического коэффициента турбулентной вязкости $\varepsilon_т$

$$\frac{\partial \varrho u \varepsilon_т}{\partial x}+\frac{\partial \varrho v \varepsilon_т}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[(\alpha_2 \varrho \varepsilon_т+\mu)\frac{\partial \varepsilon_т}{\partial y}\right]+$$

$$+\frac{\nu}{y}\left[(\alpha_2 \varrho \varepsilon_т+\mu)\frac{\partial \varepsilon_т}{\partial y}-\varrho v \varepsilon_т\right]+\alpha_1 \varrho \varepsilon_т\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|+\alpha_3 \varepsilon_т+u\frac{\partial \varrho}{\partial x}, \qquad (1.46)$$

где α_1, α_2 и α_3 — эмпирические постоянные, для которых были приняты значения 0,2; 2 и 0,5 соответственно.

При наличии химических реакций проблема замыкания уравнений для усредненных величин усложняется еще и необходимостью усреднения источникового члена F_i в уравнениях, описывающих изменение концентраций компонентов. В турбулентном потоке средняя скорость химической реакции не определяется в виде закона Аррениуса при средних значениях температуры и концентраций компонентов, но существенным образом зависит также от пульсаций этих величин. Турбулентность может как увеличивать, так и уменьшать среднюю скорость химической реакции по сравнению со скоростью, вычисленной по средним значениям температуры и концентраций реагентов.

Следует отметить, что учет влияния турбулентности на протекание химических реакций представляет чрезвычайно сложную задачу, которая до сих пор строго еще не решена. О существующих подходах к решению этой проблемы см. в работе [60].

Сказанное относится и к колебательной релаксацич.

Заметим, что ввиду сложности учета турбулентных пульсаций на скорости релаксационных процессов, при исследовании струйных течений они обычно определяются по средним значениям параметров. Такое предположение, в частности, используется в подразд. 3.3.3, где анализируется течение в неизобарической спутной струе с химическими реакциями.

1.3. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ТЕЧЕНИЯ В СВЕРХЗВУКОВЫХ НЕИЗОБАРИЧЕСКИХ СТРУЯХ

1.3.1. Нестационарная аналогия

Для анализа течения в неизобарических струях в рамках идеального газа используется приближенная модель, основанная на использовании известной в гиперзвуковой аэродинамике нестационарной аналогии (закона плоских сечений) [62, 65].

Чтобы показать существо этого приближенного подхода, рассмотрим для определенности недорасширенную струю в спутном потоке, предполагая, что газ является совершенным, а числа Маха струи и спутного потока велики, т. е. $M_a \gg 1$, $M_\infty \gg 1$.

Известно [65], что при обтекании тонкого тела гиперзвуковым потоком газа возмущение продольной составляющей скорости является величиной более высокого порядка малости, чем возмущение поперечной составляющей:

$$W_\infty - u \sim W_\infty \tau^2, \quad v \sim W_\infty \tau, \tag{1.47}$$

где τ — малый параметр, например наибольшее значение угла, образованного поверхностью тела и направлением невозмущенного потока. Область возмущенного движения между головной ударной волной и поверхностью обтекаемого тонкого тела представляет собой тонкий слой сжатого газа, относительная толщина которого также имеет порядок τ.

Обтекание границы струи спутным гиперзвуковым потоком можно рассматривать как обтекание тонкого тела с углом τ, порядок которого определяется характерным углом наклона потока ϑ в струе.

В качестве приближенной оценки ϑ можно принять значение максимального угла поворота потока θ_{max} при расширении струи в вакуум, характеризующего начальный угол наклона границы струи при $n \gg 1$. Можно показать, что при $M_a \gg 1$ и $\theta_a = 0$ $\theta_{max} \approx \frac{2}{\gamma_a - 1} M_a^{-1}$. Поэтому при $M_a \gg 1$ $\vartheta \sim M_a^{-1} \ll 1$.

В случае $M_\infty \gg 1$, учитывая эту оценку ϑ, а также оценки (1.47), для области спутного потока получим

$$u/W_\infty = 1 + O(M_a^{-2});\quad v/W_\infty = O(M_a^{-1}).$$

В области изоэнтропийного расширения скорость газа стремится к своему максимальному значению $W_{max} = \sqrt{2H_a}$. Из уравнения Бернулли нетрудно установить, что при гиперзвуковых числах Маха

$$W/W_{max} = 1 - [(\gamma - 1)M^2]^{-1}.$$

Поэтому если $M_a \gg 1$, то в изоэнтропийном ядре с точностью до $[(\gamma_a - 1)M_a^2]^{-1}$ значение скорости газа можно считать постоянным $W \approx W_a \approx W_{max}$, а в силу $\vartheta \ll 1$ продольная составляющая скорости также остается примерно постоянной, изменяясь в изоэнтропийном ядре струи в пределах $W_a \leqslant u \leqslant W_{max}$.

Поэтому в целях упрощения описания течения вообще можно пренебречь изменением продольной составляющей скорости, выбрав в качестве характерного значения u некоторое среднее значение U.

Поток перед висячим скачком является гиперзвуковым, а угол поворота потока в этом скачке (по крайней мере в области до максимального расширения струи) имеет порядок ϑ. Поэтому для изменения скорости в висячем скачке уплотнения справедливы оценки (1.47), согласно которым значение продольной составляющей скорости можно считать постоянным и за висячим скачком.

Таким образом, при M_a, $M_\infty \gg 1$ в области спутного потока $u \approx W_\infty$, а в области струи $u \approx U$. Поскольку W_∞ / W_a является несущественным параметром и при заданных значениях M_a, M_∞ и n может быть произвольной величиной, то, не теряя общности, можно положить $U = W_\infty$. Тогда во всей области течения продольная составляющая скорости газа будет с точностью до M_a^{-2} постоянной и равной U.

Если выделить на срезе сопла слой частиц газа, то при движении в струе частицы будут перемещаться в этом слое в поперечном направлении, не испытывая продольного смещения. Аналогичная ситуация будет наблюдаться в слое частиц в спутном потоке. В этом состоит закон плоских сечений для гиперзвуковой струи.

Оценим порядок производных

$$\frac{\partial u}{\partial x}\sim\frac{U\tau^2}{L}\ll\frac{\partial v}{\partial y}\sim\frac{U\tau}{L\tau}=\frac{U}{L};$$

$$u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}=U\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+O(\tau^2).$$

Здесь L — характерный линейный размер.

Если систему уравнений (1.18) ... (1.20) конкретизировать применительно к двумерному стационарному течению и пренебречь членами порядка τ^2 по сравнению с единицей, то получим уравнение неразрывности, уравнение движения для составляющей v и уравнение энергии в следующем виде:

$$U\frac{\partial\varrho}{\partial x}+v\frac{\partial\varrho}{\partial y}+\varrho\frac{\partial v}{\partial y}+\nu\frac{\varrho v}{y}=0; \qquad (1.48)$$

$$U\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}=0; \qquad (1.49)$$

$$U\frac{\partial h}{\partial x}+v\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{1}{\rho}\left(U\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}\right)=0. \qquad (1.50)$$

Эти уравнения образуют замкнутую систему уравнений независимо от уравнения движения для составляющей u.

Если в уравнениях (1.48) ... (1.50) положить $x=Ut$, то эти уравнения совпадут с уравнениями одномерного неустановившегося движения газа в неподвижной плоскости, перпендикулярной оси струи.

Рассмотрим граничные условия на ударной волне в спутном потоке. Скорость распространения ударной волны в одномерном нестационарном течении равна $D=dy/dt=Udy/dx=U\beta=v_{n\infty}$, где β — угол наклона ударной волны к оси x, а $v_{n\infty}$ — нормальная составляющая относительной скорости газа перед ударной волной. Соотношения же на ударной волне в виде (1.25) одинаковы для стационарных и нестационарных течений.

На границе струи $dy/dx=\mathrm{tg}\theta$, являющейся линией контактного разрыва, выполняются условия непрерывности давления и угла наклона θ вектора скорости к оси x. В рассматриваемом приближении имеем

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{U}\frac{dy}{dt}=\frac{v}{u}\approx\frac{v}{U}, \text{ т. е. } \frac{dy}{dt}=v;$$

$$0=[\mathrm{tg}\theta]=\left[\frac{v}{u}\right]=\left[\frac{v}{U}\right], \text{ т. е. } [v]=0,$$

где [ ] означает разность значений на разрыве. Это показывает, что граничные условия на границе струи переходят в граничные условия на контактном разрыве в одномерном нестационарном течении.

Таким образом, стационарное истечение гиперзвуковой струи в гиперзвуковой спутный поток эквивалентно нестационарному разлету плоского ($\nu=0$) или цилиндрического ($\nu=1$) слоя газа в среду с заданным противодавлением, причем безразмерная продольная координата струи $\bar{x}=x/r_a$ и безразмерное время $\bar{t}=t/\sqrt{p_\infty/\varrho_\infty}$ связаны соотношением $\bar{t}=\bar{x}/(\sqrt{\gamma_\infty}\cdot M_\infty)$, где r_a — радиус (высота) среза сопла или начальный размер слоя. Начальные распределения параметров v, ϱ, p в слое соответствуют распределениям параметров на срезе сопла.

Решение задачи о нестационарном разлете однородного слоя газа зависит от следующих безразмерных параметров: p_a/p_∞, ϱ_a/ϱ_∞, γ_a, γ_∞. Начальные условия в слое следующим образом связаны с начальными параметрами струи:

$$p_a/p_\infty=n,\ \ \varrho_a/\varrho_\infty=\gamma_a n M_a^2/(\gamma_\infty M_\infty^2).$$

Выражение для ρ_a/ρ_∞ получено в предположении $U=W_\infty=W_a$.

На рис. 1.15 показана форма осесимметричной гиперзвуковой струи, истекающей в гиперзвуковой спутный поток, при $\gamma_a=\gamma_\infty=1{,}4$, $n=12{,}7$, $M_a=5$, $M_\infty=17{,}8$. На рисунке обозначено: *1* — головная ударная волна в спутном потоке; *2* — граница струи; *3* — внутренние ударные волны; $\bar{y}=y/r_a$, $\bar{x}$ — безразмерные координаты. Здесь же показаны положения головной ударной волны (значки $\times$) и контактной поверхности (значки $\bigcirc$) из численного решения задачи о распаде цилиндрического слоя сжатого газа. Видно хорошее соответствие результатов решения двумерной стационарной задачи о неизобарической струе и эквивалентной одномерной нестационарной задачи.

Рассмотрим случай затопленной струи ($M_\infty=0$). Аналогичный анализ показывает, что задача об истечении гиперзвуковой неизобарической струи (недорасширенной или перерасширенной) в среду с заданным давлением p_∞ эквивалентна задаче об одномерном нестационарном движении слоя газа, возникающем под действием поршня (плоского или цилиндрического соответственно для плоской или осесимметричной струи), закон движения которого обеспечивает постоянное давление на его поверхности,

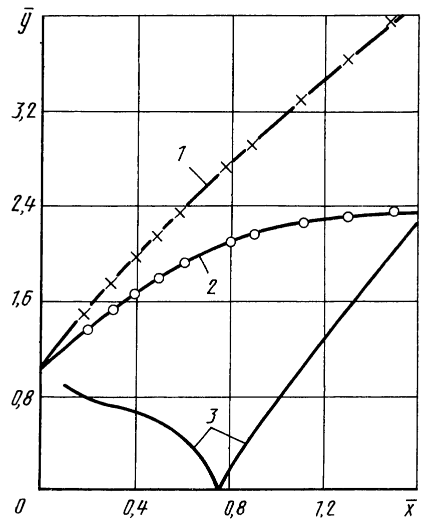


Рис. 1.15. Сравнение структур осесимметричной гиперзвуковой струи и нестационарного одномерного течения (обозначения даны в тексте)

равное p_∞. Задача об истечении гиперзвуковой струи в вакуум, эквивалентна задаче о нестационарном расширении слоя газа в вакуум.

При этом безразмерное расстояние вдоль струи $\bar{x}=x/r_a$ и безразмерное время $\bar{t}=t/\sqrt{p_a/\varrho_a}$ связаны соотношением $t=(\bar{x}/\sqrt{\gamma_a}\,\mathrm{M}_a)U/W_a$. О выборе U см. подразд. 2.1.4 и 3.1.3.

1.3.2. Модель источника для течения в изоэнтропийном ядре сильно недорасширенной струи

Уравнения Эйлера (1.18) ... (1.20) имеют точное решение, соответствующее стационарному изоэнтропийному течению от точечного источника. В этом течении линии тока — прямые линии, исходящие из полюса источника, а изменение параметров определяется соотношением

$$\varrho W s^{\nu+1}=m=\varrho_* W_* s_*^{\nu+1}=\mathrm{const}, \qquad (1.51)$$

где $\nu=0$ и 1 для плоского и осесимметричного течений соответственно; s — расстояние от полюса до рассматриваемой точки; индекс «*» обозначает параметры на поверхности, на которой скорость газа равна скорости звука. Решение, существующее только при $s>s_*$, описывает сверхзвуковое течение с монотонным увеличением скорости газа от звуковой до максимальной.

Анализ уравнений (1.18) ... (1.20) для условий ($W\approx W_{\max}$, $\mathrm{M}\gg1$), существующих в изоэнтропийном ядре сильно недорасширенной струи (область свободного расширения, ограниченная скачками уплотнения), показывает, что на больших расстояниях от среза сопла течение приобретает характер течения от источника. Полюс источника приближенно можно считать расположенным в центре среза сопла, но в отличие от классического источника (1.51) интенсивность его на различных линиях тока неодинакова:

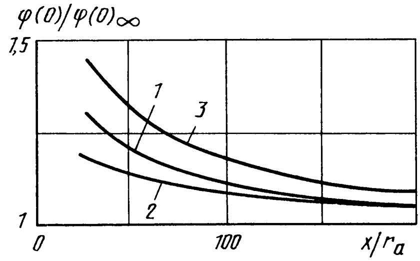
$$\varrho W s^{\nu+1}=m(\omega), \qquad (1.52)$$

где $s=\sqrt{x^2+y^2}$; $\omega=\mathrm{arctg}\, y/x$; x, y — цилиндрические (декартовы) координаты с началом в центре среза сопла.

Результаты численных расчетов осесимметричного расширения показывают, что распределения угла наклона θ вектора скорости к оси x соответствуют течению от такого источника (т. е. $\mathrm{tg}\theta=y/x$) начиная уже с относительно небольших расстояний от среза сопла, по крайней мере, при $x/r_a>10$ независимо от значений других определяющих параметров γ_a, M_a, θ_a.

В то же время переход к зависимости (1.52) вдоль линий тока происходит асимптотически. Определим локальную приведенную интенсивность источника как $\varphi(\omega)=m/(\varrho_a W_a r_a^2)$. На рис. 1.16 показано изменение величины $\varphi(0)/\varphi(0)_\infty$, где $\varphi(0)$ — местное значение φ на оси струи, $\varphi(0)_\infty$ — асимптотическое значение $\varphi(0)$ при $x \to \infty$. В отличие от классического источника в изоэнтропийном ядре осесимметричной струи интенсивность источника монотонно уменьшается. При этом ее изменение тем

Рис. 1.16. Изменение $\varphi(0)/\varphi(0)_\infty$ вдоль оси струи:
1 — $M_a=3$, $\gamma_a=1,3$; *2* — $M_a=3$, $\gamma_a=1,67$; *3* — $M_a=5$, $\gamma_a=1,3$



больше, чем меньше γ_a и чем больше M_a. Аналогичная картина имеет место и на других линиях тока.

Вместе с тем из результатов численных расчетов следует, что изменение интенсивности источника при $x/r_a \geqslant 100$ не превышает примерно 20% (по крайней мере, для $M_a \leqslant 10$ и $\gamma_a \geqslant 1,2$). Поэтому приближенно можно рассчитывать течение в дальней части изоэнтропийного ядра осесимметричной струи по формуле источника (1.52), которую можно привести к виду

$$q(M) = \varphi(\omega)\, q(M_a)(s/r_a)^{-2}, \tag{1.53}$$

где $q(M) = \varrho W/(\varrho_* W_*) = M\left(\frac{2}{\gamma+1} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}M^2\right)^{-(\gamma+1)/2(\gamma-1)}$ — газодинамическая функция расхода.

При этом

$$\varphi(0) = \frac{\gamma_a+1}{\gamma_a-1}\theta^2_{\max}; \tag{1.54}$$

$$\varphi(\omega)/\varphi(0) = [1-(\omega/\theta_{\max})^2]^{2/(\gamma_a-1)}, \tag{1.55}$$

где $\theta_{\max}$ — максимальный угол поворота потока с числом Маха, равным M_a, при расширении в вакуум, который определяется по формуле

$$\theta_{\max} = \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\frac{\gamma_a+1}{\gamma_a-1}} - 1\right) - f(\gamma_a, M_a). \tag{1.56}$$

Функция $f(\gamma, M)$ — угол Прандтля—Мейера — равна

$$f(\gamma, M) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(M^2-1)} - \operatorname{arctg}\sqrt{M^2-1}.$$

В диапазоне $1 \leqslant M_a \leqslant 2$ формула (1.54) несколько занижает значение $\varphi(0)$.

Поскольку хорошим приближением для величины скорости в изоэнтропийном ядре является ее максимальное значение, то из формулы источника нетрудно получить следующее распределение плотности газа:

$$\varrho/\varrho_a = B(\gamma_a, M_a)(s/r_a)^{-2}[1-(\omega/\theta_{max})^2]^{2/(\gamma_a-1)}, \qquad (1.57)$$

где параметр $B(\gamma_a, M_a) = \frac{\gamma_a+1}{\gamma_a-1}\frac{\lambda_a}{\lambda_{max}}\theta_{max}^{-2}$;

λ — коэффициент скорости; $\lambda_a/\lambda_{max} = \left[1+\frac{2}{(\gamma_a-1)M_a^2}\right]^{-0,5}$.

Поскольку течение в ядре струи является изоэнтропийным, то

$$p/p_a = (\varrho/\varrho_a)^{\gamma_a} \text{ и } T/T_a = (\varrho/\varrho_a)^{-1/(\gamma_a-1)}.$$

Можно также показать, что зависимость числа Маха от продольной и поперечной координат имеет вид:

$$M_0 \sim (x/r_a)^{\gamma_a-1}, \quad M/M_0 = [1-(\omega/\theta_{max})^2]^{-1}.$$

1.3.3. Приближенная математическая модель неизобарической струи вязкого газа

Расчет сильно недорасширенной струи вязкого газа по полным или даже по укороченным уравнениям Навье—Стокса представляет достаточно трудоемкую задачу. Поэтому по-прежнему актуальной остается разработка эффективных приближенных моделей, основанных на выявленных особенностях течения.

Из анализа описываемых далее экспериментальных данных следуют две важные отличительные особенности. Первая из них состоит в том, что при турбулентном и ламинарном режимах, когда уровень чисел Рейнольдса достаточно высок, слой смешения с внутренней и внешней условными границами $y_i(x)$ и $y_e(x)$ оказывается отделенным от висячего скачка $y_1(x)$ и головной ударной волны $y_3(x)$ достаточно протяженными зонами с почти невязкими потоками. Это дает возможность отделить зону слоя смешения от остального течения и анализировать ее независимо. При этом появляется возможность построения приближенного метода расчета параметров в этой зоне как самостоятельного структурного элемента, что позволяет избежать необходимости проведения для каждого конкретного случая решения такой сложной системы уравнений как уравнения Навье—Стокса.

Если здесь в качестве граничных условий использовать местные параметры, соответствующие расчетам по теории невязкой жидкости, то для распределения параметров в слое смешения получим первое приближение, не учитывающее эффекта вязкого взаимодействия, который проявляется в перераспределении параметров в прилегающих к слою смешения невязких зонах и оттеснения ударных волн. Следовательно, требуется учесть обратное влияние слоя смешения на области невязкого течения.

Вторая из отмеченных особенностей состоит в том, что на расстоянии от среза сопла, равном по порядку величины нескольким калибрам выходного сечения последнего, в слое смешения начального участка недорасширенной струи устанавливаются примерно автомодельные поперечные распределения параметров.

Поэтому для описания слоя смешения неизобарической струи, как и в случае изобарической, можно использовать интегральные методы.

В отличие от случая изобарической струи слой смешения начального участка неизобарической струи развивается вдоль криволинейной поверхности, вследствие чего давление поперек этого слоя является переменным ($\partial p/\partial y>0$). При истечении в спутный поток, кроме того, имеет место и значительный отрицательный продольный градиент давления. Поэтому структура слоя смешения здесь сложнее по сравнению с изобарическим случаем.

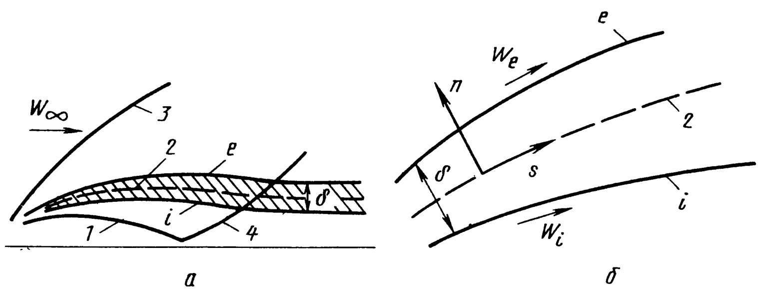


Рис. 1.17. Слой смешения начального участка струи:
1 — висячий скачок уплотнения; *2* — средняя линия в слое смешения; *3* — головная ударная волна; *4* — отраженный скачок уплотнения; *i* — внутренняя граница слоя смешения, *e* — внешняя граница слоя смешения; δ — толщина слоя смешения, *s*, *n* — ортогональные координаты

Ограничимся случаем осесимметричного течения и будем считать, что по обе стороны слоя смешения (рис. 1.17) расположены зоны течения, в которых проявление вязких эффектов пренебрежимо мало. Положим числа Pr и Sc равными единице и будем исходить из следующей системы уравнений, записанных в криволинейной ортогональной системе координат s, n (s — продольная координата, n — координата по нормали к s), связанной с некоторой линией внутри слоя смешения, полагаемой в дальнейшем линией $y_{0,5}$, на которой значения скорости и полной энтальпии равны полусумме соответствующих значений на границах слоя смешения в данном сечении (s=const)

$$\varrho W\frac{\partial H}{\partial s}=\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial n}\left[y(\mu+\varrho\nu_{\text{т}})\frac{\partial H}{\partial n}\right]; \qquad (1.58)$$

$$\varrho W^2/R=\partial p/\partial n. \qquad (1.59)$$

Здесь H — полная энтальпия газа; μ — динамический коэффициент ламинарной вязкости; $\nu_{\text{т}}$ — кинематический коэффициент турбулентной вязкости; R — радиус кривизны линий тока. Данная система уравнений может быть получена из уравнений вязкого ударного слоя [62], если в последних провести упрощения, соответствующие следующим условиям, имеющим место в слое смешения недорасширенной струи: составляющая скорости газа в направлении n существенно меньше составляющей скорости в направлении s так, что последняя близка к $W_{\max}$, а толщина δ слоя смешения мала по сравнению с R.

Обозначим через n_i и n_e координаты внутренней и внешней границ слоя смешения и перейдем к интегральным соотношениям, интегрируя уравнение (1.58) в пределах от значения $n_s<n_i$ до значения n_e. При этом будем считать, что вне слоя смешения конечной толщины δ течение газа изоэнтропийное вдоль каждой линии тока, а энтальпии торможения $H_i=H_a$ и $H_e=H_\infty$ смешивающихся внутреннего и внешнего потоков постоянны за пределами вязкого слоя при $n<n_i$ и $n>n_e$.

После умножения уравнения (1.58) на H^k и интегрирования поперек слоя смешения с учетом уравнения неразрывности получаем совокупность бесконечного числа моментных интегральных соотношений

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_{n_s}^{n_e}\varrho W y(H^{k+1}-H_e^{k+1})dn+k(k+1)\int_{n_i}^{n_e}y(\mu+\varrho_{\text{т}}^{\nu})\frac{\partial H}{\partial n}\frac{\partial H^k}{\partial n}dn=0,$$

представляющих собой бесконечную систему интегральных соотношений В. В. Голубева для рассматриваемого случая.

При $k=0$ и $k=1$ имеем уравнение сохранения избыточной энтальпии торможения

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_{n_s}^{n_e}\varrho W y(H-H_e)dn=0 \tag{1.60}$$

и уравнение, описывающее диссипацию энергии в слое смешения,

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_{n_s}^{n_e}\varrho W y(H^2-H_e^2)dn+2\int_{n_i}^{n_e}y(\mu+\varrho\nu_{\text{т}})\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)^2dn=0. \tag{1.61}$$

Умножив уравнение (1.60) на (H_i+H_e) и вычитая результат из (1.61), приходим к уравнению

$$(H_i-H_e)^2\frac{\partial}{\partial s}\int_{n_i}^{n_e}\varrho W y\Delta H(1-\Delta H)dn=2\int_{n_i}^{n_e}y(\mu+\varrho\nu_{\text{т}})\left(\frac{\partial H}{\partial n}\right)^2dn, \tag{1.62}$$

где введено обозначение $\Delta H=(H-H_e)/(H_i-H_e)$.

Заменим в уравнении (1.62) координату y ее средним значением $y_{0,5}$ в слое смешения и перейдем в последнем уравнении от физической переменной n к безразмерной переменной φ, используя преобразование Дородницына—Манглера

$$\varrho y_{0,5}dn=\varrho_a r_a\delta_D d\varphi;\quad \varphi=\frac{y_{0,5}}{\delta_D}\int_{n_i}^{n}\frac{\varrho}{\varrho_a}d\left(\frac{n}{r_a}\right);$$

$$n-n_i=\frac{r_a\delta_D}{y_{0,5}}\int\limits_0^{\varphi}\frac{\varrho_a}{\varrho}d\varphi;\quad \frac{\partial}{\partial n}=\frac{\varrho y_{0,5}}{\varrho_a r_a\delta_D}\frac{\partial}{\partial\varphi},\tag{1.63}$$

где δ_D — толщина слоя смещения в новых переменных. При этом уравнение (1.62) примет вид, соответствующий несжимаемому струйному течению в плоском случае.

Введем также автомодельные профили для распределения поперек слоя смешения концентрации c и избыточных энтальпии торможения $\Delta H=(H-H_e)/(H_i-H_e)$ и скорости $\Delta W=(W-W_e)/(W_i-W_e)$ в соответствии со сделанными ранее предположениями, что $\mathrm{Pr}=1$, $\mathrm{Sc}=1$:

$$f(\varphi)=c=\Delta H=\Delta W.$$

В качестве $f(\varphi)$ выберем конкретно полином

$$f(\varphi)=1-3\varphi^2+2\varphi^3,\tag{1.64}$$

представляющий собой нечетную функцию относительно переменной $(\varphi-1/2)$. Тогда уравнение (1.52) перейдет в уравнение

$$\frac{\partial\psi}{\partial s}=\frac{140}{9}\frac{y_{0,5}^2W_{0,5}}{\psi}\int\limits_0^1\varrho(\mu+\varrho\nu_\text{т})\ [f'(\varphi)]^2d\varphi\tag{1.65}$$

для функции $\psi=\varrho_a W_{0,5}\delta_D r_a$, где $W_{0,5}=0,5(W_i+W_e)$.

Для коэффициента турбулентной вязкости используем формулу

$$\nu_\text{т}=\zeta\sqrt{e_\text{т}}\cdot\Lambda,$$

где $e_\text{т}$ — энергия турбулентности, определяемая уравнением

$$\varrho W\frac{\partial e_\text{т}}{\partial s}=\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial n}\left[y(\mu+\varrho\nu_\text{т})\frac{\partial e_\text{т}}{\partial n}\right]+$$
$$+\varrho\nu_\text{т}\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)^2-(\mu+\varrho\nu_\text{т})\frac{\Omega e_\text{т}}{\Lambda}.\tag{1.66}$$

Здесь Λ — масштаб турбулентности, полагаемый в дальнейшем равным $(W_e-W_i)/(\partial W/\partial n)_{\max}$, ζ и Ω — эмпирические константы.

Умножив уравнение (1.66) на ydn, проинтегрировав по толщине слоя смешения, получаем при переходе к переменным, введенным формулами (1.55),

$$\frac{d(e_\text{т}\psi)}{ds}=\zeta\frac{y_{0,5}^2(W_i-W_e)^2W_{0,5}\sqrt{e_\text{т}}\cdot\Lambda}{\psi}\times$$
$$\times\int\limits_0^1\varrho^2[f'(\varphi)]^2d\varphi-\zeta\Omega\frac{e_\text{т}\sqrt{e_\text{т}}\cdot\psi}{W_{0,5}\Lambda}-\Omega\frac{e_\text{т}\psi}{W_{0,5}\Lambda^2}\int\limits_0^1\frac{\mu}{\varrho}d\varphi.\tag{1.67}$$

Уравнения (1.65) и (1.67) могут быть упрощены, если величины интегралов в их правых частях определить по теореме о среднем

$$\int_0^1 \mu\varrho\,[f'(\varphi)]^2 d\varphi=\mu_{0,5}\varrho_{0,5}\int_0^1 [f'(\varphi)]^2 d\varphi=6\mu_{0,5}\varrho_{0,5}/5;$$

$$\int_0^1 \varrho^2\,[f'(\varphi)]^2 d\varphi=\varrho_{0,5}^2\int_0^1 [f'(\varphi)]^2 d\varphi=6\varrho_{0,5}^2/5.$$

Отметим, что, поскольку для профиля $f(\varphi)=1-3\varphi^2+2\varphi^3$ функция $[f'(\varphi)]^2$ имеет максимум при $\varphi=0{,}5$, значения средних величин $\mu_{0,5}\varrho_{0,5}$ и $\varrho_{0,5}$ следует принимать равными соответственно $\mu\varrho|_{\varphi=0,5}$ и $\varrho|_{\varphi=0,5}$. С меньшей точностью может быть проведено упрощение второго интеграла в правой части (1.67) в виде $\int_0^1 (\mu/\varrho)d\varphi=\mu_{0,5}/\varrho_{0,5}$. Однако, имея в виду некоторую свободу при выборе эмпирической константы Ω в третьем члене уравнения (1.67), такое упрощение можно считать также вполне удовлетворительным.

Уравнения (1.65) и (1.67) после указанных упрощений, предположения $\Lambda=(W_e-W_i)/(\partial W/\partial n)_{\max}$ и ряда преобразований принимают следующий вид:

$$\frac{de_{\text{т}}}{ds}=-\frac{\zeta}{(\partial f/\partial\varphi)_m}\left[\frac{6}{5}(W_i-W_e)^2-\beta e_{\text{т}}\right]\frac{\varrho_{0,5}y_{0,5}\sqrt{e_{\text{т}}}}{\psi}-$$
$$-\beta\frac{\varrho_{0,5}W_{0,5}\mu_{0,5}y_{0,5}^2e_{\text{т}}}{\psi}; \tag{1.68}$$

$$\frac{d\psi}{ds}=\frac{56}{3}\left(-\frac{\zeta}{(\partial f/\partial\varphi)_m}\varrho_{0,5}y_{0,5}\sqrt{e_{\text{т}}}+\frac{\varrho_{0,5}W_{0,5}\mu_{0,5}y_{0,5}^2}{\psi}\right), \tag{1.69}$$

где $\beta=\Omega(\partial f/\partial\eta)_m^2+\frac{56}{3}$.

Таким образом, при сделанных предположениях и упрощениях удалось получить систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных $e_{\text{т}}$ и ψ.

В зависимости от условий течения слагаемые в правых частях уравнений (1.68) и (1.69), характеризующие ламинарную и турбулентную вязкость, могут принимать различные значения. Отношение первого слагаемого правой части уравнения (1.69) ко второму равно $\zeta\varrho_{0,5}\sqrt{e}\cdot\delta/[\mu_{0,5}(\partial f/\partial\varphi)_m]$, т. е. пропорционально числу $\mathrm{Re}_\delta=\varrho_{0,5}\sqrt{e_{\text{т}}}\cdot\delta/\mu_{0,5}$. При малых Re_δ течение ламинарное, при $\mathrm{Re}_\delta\gg 1$ — турбулентное, а при промежуточных значениях Re_δ

решение системы уравнений (1.68), (1.69) должно описывать переход режима течения в слое смешения из ламинарного в турбулентное и обратно.

При ламинарном режиме течения (малые Re_δ) уравнение (1.62) принимает вид

$$\psi\frac{d\psi}{ds}=\frac{56}{3}\varrho_{0,5}W_{0,5}\mu_{0,5}y_{0,5}^2. \tag{1.70}$$

После его интегрирования и обратного перехода к физической переменной n получаем

$$n-n_i=4\sqrt{\frac{7}{3}}\left[\int\limits_0^\varphi\frac{\varrho_{0,5}}{\varrho}d\varphi\right]S_l/\sqrt{\mathrm{Re}_S}; \tag{1.71}$$

$$\delta\sqrt{\mathrm{Re}_S}/S_l=4\sqrt{\frac{7}{3}}\int\limits_0^1\frac{\varrho_{0,5}}{\varrho}d\varphi, \tag{1.72}$$

где $Re_S=\varrho_{0,5}W_{0,5}S_l/\mu_{0,5}$ — число Рейнольдса, вычисленное по средним значениям параметров в слое смешения и «эффективной» длине для ламинарного режима

$$S_l=\frac{1}{\mu_{0,5}\varrho_{0,5}W_{0,5}y_{0,5}^2}\int\limits_{s_*}^{s}\mu_{0,5}\varrho_{0,5}W_{0,5}y_{0,5}^2ds+S_*. \tag{1.73}$$

Выражение для S_l практически совпадает с известным преобразованием Лиза и близко к выражению для «эффективной» длины, введенной В. С. Авдуевским при расчете ламинарного пограничного слоя на твердой поверхности. Слагаемое $S_*=$ $=\frac{3}{112}\frac{\varrho_*}{\varrho_{0,5}}\frac{y_*^2}{y_{0,5}^2}\frac{W_*}{W_{0,5}}\frac{\mu_*}{\mu_{0,5}}\frac{\varrho_*W_*}{\mu_*}\delta_*^2$ характеризует влияние начальной толщины слоя смешения δ_*. Оценки показывают, что для струй большой степени нерасчетности и на расстояниях от сопла, сравнимых с характерным размером начального участка струи, слагаемое S_* незначительно влияет на S_l.

Рассмотрим теперь случай развитого турбулентного течения. Положив $\zeta\sqrt{e_\text{т}}=\varkappa|W_i-W_e|$, что соответствует второй формуле Прандтля для коэффициента вязкости $\nu_\text{т}=\varkappa|W_i-W_e|\Lambda$, уравнение (1.69) при $\mathrm{Re}_\delta\gg1$ можно записать в виде

$$\frac{d\psi}{ds}=12{,}5\varkappa\varrho_{0,5}y_{0,5}\,|W_i-W_e|. \tag{1.74}$$

После его интегрирования и обратного перехода к физической переменной n имеем

$$n-n_i=25\varkappa S_\text{т}\langle\,|W_i-W_e|\,\rangle\int\limits_0^\varphi(\varrho_{0,5}/\varrho)d\varphi/(W_i+W_e); \tag{1.75}$$

$$\delta/S_{\text{т}}=25\varkappa \left\langle \, |W_i-W_e| \, \right\rangle \int\limits_0^1 (\varrho_{0,5}/\varrho) d\varphi/(W_i+W_e), \qquad (1.76)$$

где $\langle |W_i-W_e| \rangle$ — среднее значение $|W_i-W_e|$ на участке $(S_*,\ S_{\text{т}})$; $S_{\text{т}}$ — эффективная длина для турбулентного режима, имеет вид

$$S_{\text{т}}=\frac{1}{\varrho_{0,5}y_{0,5}}\int\limits_{s_*}^{s} \varrho_{0,5}y_{0,5}ds+S_*, \qquad (1.77)$$

а слагаемое S_*, характеризующее влияние толщины слоя смешения в некотором начальном сечении $s=S_{\text{т}}$, выражается соотношением $S_*=0{,}04\frac{W_*}{W_{0,5}}\frac{y_*}{y_{0,5}}\frac{\varrho_*}{\varrho_{0,5}}\frac{\delta_*}{\varkappa}$.

Распределение давления поперек слоя смешения можно получить интегрируя по n уравнение количества движения (1.59) в проекции на нормаль. Совершая переход к переменной φ и вводя автомодельный профиль $f(\varphi)$ в виде уравнения (1.64), находим

$$\frac{p-p_i}{p_e-p_i}=\varphi\frac{(W_i-W_e)^2\Phi_1(\varphi)+2W_e(W_i-W_e)\Phi_2(\varphi)+W_e^2}{(13/35)(W_i-W_e)^2+W_iW_e}, \qquad (1.78)$$

где p_i и p_e — давление на внутренней и внешней границах слоя смешения соответственно; $\Phi_1(\varphi)=1-2\varphi^2+\varphi^3+1{,}8\varphi^4-2\varphi^5+\frac{4}{7}\varphi^6$; $\Phi_2(\varphi)=1-\varphi^2+0{,}5\varphi^3$. По заданным автомодельным профилям может быть найдено распределение статических энтальпий, а с использованием распределения давления (1.78) — значения плотности.

Распределение энтальпии имеет вид

$$h=h_e+(h_i-h_e)f(\varphi)+0{,}5(W_i-W_e)^2f(\varphi)\left[1-f(\varphi)\right].$$

Для средней энтальпии в слое смешения, соответствующей координате $\varphi=0{,}5$, последнее уравнение дает

$$h_{0,5}=H_{0,5}-0{,}5W_{0,5}^2,$$

где $H_{0,5}=0{,}5(H_i+H_e)$; $W_{0,5}=0{,}5(W_i+W_e)$.

Это означает, что для струи большой степени нерасчетности, в которой скорости W_i и W_e вдоль границ y_i и y_e меняются слабо, средняя энтальпия в слое смешения остается практически постоянной на длине всего начального участка.

Соотношения (1.72), (1.73), (1.76), (1.77) позволяют определить толщину δ слоя смешения при ламинарном и развитом турбулентном режимах. Если в слое смешения имеется переход от ламинарного режима к турбулентному, то для определения параметров этого слоя необходимо решить систему уравнений (1.68), (1.69), а в более точной постановке — дополнить уравнением для масштаба турбулентности Λ.

По распределениям параметров в слое смешения можно вычислить расходы $G_{i\delta}$ и $G_{e\delta}$ газов струи и спутного потока в слое смешения.

$$G_{i\delta}=2\pi\int_{n_i}^{n_e} c\varrho Wydn;\quad G_{e\delta}=2\pi\int_{n_i}^{n_e}(1-c)\varrho Wydn,$$

где c — концентрация газа струи.

Области невязкого течения в спутной недорасширенной струе можно рассчитать, если иметь дополнительные условия на внутренней и внешней границах слоя смешения. В качестве таких условий, позволяющих замкнуть задачу и одновременно учесть взаимодействие невязких областей со слоем смешения, можно использовать уравнения неразрывности

$$dG_{i\delta}/ds=dG_i/ds;$$

$$dG_{e\delta}/ds=dG_e/ds$$

и проинтегрированное по толщине слоя смешения уравнение движения в проекции на нормаль

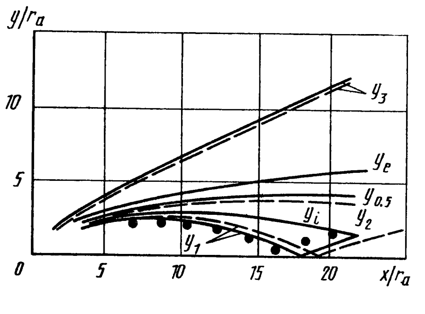
$$p_e-p_i=\int_{n_i}^{n_e}\frac{\varrho W^2}{R}dn,$$

где G_i и G_e — расходы газа, поступающие в слой смешения через его внутреннюю и внешнюю границы.

Численный метод расчета более подробно изложен в работе [54]. На рис. 1.18, 1.19 приведены некоторые результаты расчетов по этому методу недорасширенной спутной струи при развитом турбулентном режиме течения в слое смешения и экспериментальные данные.

На рис. 1.18 представлены конфигурации ударных волн и турбулентного слоя смешения на начальном участке струи воздуха. Параметр спутности m_0, определенный здесь как отношение скорости спутного потока W_∞ к максимальной скорости истечения струи ($W_{\max}$), равнялся 0,6.

Пунктирными линиями на рис. 1.18 нанесены ударные волны y_1 и y_3 и граница струи y_2, полученные расчетом без учета вязкости, а сплошными — кривые y_1, y_i, $y_{0,5}$, y_e, y_3, рассчитанные по описанному методу. Точками показана экспериментально определенная И. М. Карпманом и В. Д. Трасковским [27] конфигурация висячего скачка. Расхождение между расчетными и экспериментальными данными объясняется тем, что в расчете не учтены некоторые факторы, имевшие место в эксперименте, в частности неравномерность профилей параметров в спутном потоке в сечении среза сопла, вызванные наличием достаточно толстого (порядка ра-



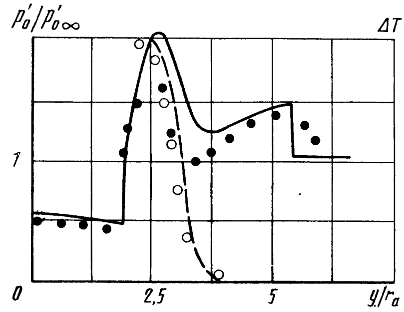


Рис. 1.18. Данные по конфигурации струи при $n=16$; $M_a=2{,}56$; $M_\infty=3{,}1$; $\gamma_a=\gamma_\infty=1{,}4$; $m=0{,}6$; $T_\infty/T_a=0{,}43$

Рис. 1.19. Поперечные профили давления полного напора $p_0'/p_{0\infty}'$ и избыточной температуры торможения ΔT_0 при $n=16$; $M_a=2{,}56$; $M_\infty=3{,}1$; $\gamma_a=\gamma_\infty=1{,}4$; $T_\infty/T_a=0{,}43$:

_______, ● — $p_0'/p_{0\infty}'$, рассчитанные по приближенному методу с учетом вязкости и определенные экспериментально соответственно; ------, ○ — T_0 рассчитанные по приближенному методу и определенные экспериментально соответственно

диуса сопла) пограничного слоя, наросшего на боковой поверхности модели, из которой истекала струя.

На рис. 1.19 для данного варианта приведены поперечные распределения избыточной температуры $\Delta T=(T_0-T_{0\infty})/(T_{0a}-T_{0\infty})$ и давления полного напора p_0', отнесенного к давлению полного напора в спутном потоке $p_{0\infty}'$, в сечении $x/r_a=8{,}5$. Точками показаны экспериментально измеренные профили тех же параметров. Можно заключить, что расчетные данные близки к экспериментальным. Некоторые расхождения следует отнести к тому, что профили сравниваются в несколько различных сечениях ($x/r_a=8{,}25$ — расчет, $x/r_a=8{,}5$ — эксперимент), а также к неизбежным аппаратурным усреднениям в эксперименте.

2. ИСТЕЧЕНИЕ СВЕРХЗВУКОВОЙ СТРУИ В ЗАТОПЛЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО

2.1. ГАЗОДИНАМИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА НАЧАЛЬНОГО УЧАСТКА НЕИЗОБАРИЧЕСКОЙ СТРУИ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

2.1.1. Перерасширенная затопленная струя

Рассмотрим влияние определяющих параметров на форму начального участка осесимметричной перерасширенной затопленной струи и распределения газодинамических величин, следуя результатам работ [25, 52]. Напомним, что для затопленной струи идеального газа определяющими параметрами являются степень нерасчетности $n=p_a/p_\infty$, причем для перерасширенной струи $n<1$, число Маха M_a и угол наклона θ_a контура сопла в выходном сечении, отношение удельных теплоемкостей γ_a газа струи. Течение в струе зависит также от распределения параметров в выходном сечении сопла. Для определенности будем считать, что в сопле реализуется течение от источника, и для краткости будем его называть коническим.

На рис. 2.1 показана форма начального участка при различных значениях нерасчетности. Видно, что при уменьшении n резко сокращается длина первой бочки струи и одновременно растет диаметр центрального скачка. В то же время диаметр границы струи в конце начального участка в широком диапазоне изменения нерасчетности меняется довольно слабо. Граница струи при n, не сильно отличающихся от единицы, и $\theta_a>0$ имеет бочкообразную форму, но в дальнейшем при уменьшении n интенсивность скачка уплотнения на кромке сопла возрастает и поджатие струи начинается сразу от среза сопла. Можно отметить, что если вблизи выхода сопла граница струи имеет вогнутую форму, то далее вниз по потоку образуется точка перегиба и вблизи отраженного скачка граница струи является вогнутой.

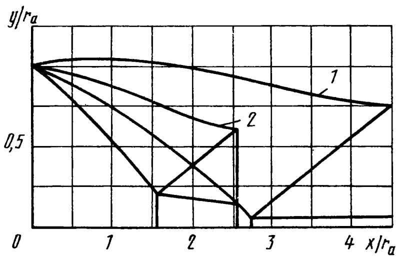


Рис. 2.1. Влияние нерасчетности на форму перерасширенной струи при $M_a=3$, $\gamma_a=1{,}2$, $\theta_a=10°$:
1 — n=07 , *2* — n=0,4

Влияние числа M_a сопла на форму струи сказывается прежде всего в существенном изменении продольного размера, тогда как влияние M_a на поджатие струи оказывается значительно более слабым. С увеличением M_a при прочих равных условиях уменьшается диаметр центрального скачка.

С ростом γ_a наблюдается уменьшение диаметра центрального скачка и увеличение продольных размеров струи. В целом же можно сказать, что γ_a довольно слабо влияет на форму начального участка перерасширенной струи. Отсюда следует, что результаты расчетов перерасширенных струй совершенного газа можно использовать для приближенного определения геометрических характеристик струй продуктов сгорания реактивных двигателей, используя эффективный показатель адиабаты.

При увеличении угла наклона стенки конического сопла растет диаметр центрального скачка, причем точка образования его смещается вниз по потоку от среза сопла.

Рассмотрим количественные зависимости для основных геометрических размеров начального участка — расстояния до центрального скачка и его диаметра (X_S, D_S) расстояния до конца начального участка и диаметра границы струи в этом сечении $(X_l,\ D_l)$.

Продольные размеры начального участка линейно зависят от $n^{0,5}$ вплоть до значений n=0,7 . . . 0,8. При приближении к расчетному режиму истечения зависимость продольных размеров от нерасчетности становится близкой к линейной по величине n. Продольные размеры начального участка линейно зависят от числа M_a.

Анализ численных результатов показывает, что определяющим параметром для продольных размеров начального участка перерасширенной струи является комплекс $K_* = \frac{2\gamma_a}{\gamma_a+1} n M_a^2$. На рис. 2.2 построены значения X_S/D_a в зависимости от $K_*^{0,5}$ при θ_a=10°. Видно, что, хотя прямые, соответствующие различным числам M_a, несколько расслаиваются, отклонение значений X_S от средней прямой (M_a=4) находится в пределах примерно $\pm15\%$. Отметим, что по параметру K_* коррелируются значения X_S, соответствующие различным значениям γ_a.

Аналогичные результаты получаются и для другого характерного продольного размера — длины первой бочки X_l. При этом оказалось, что отношение X_l/X_S является весьма стабильной характеристикой начального участка перерасширенной струи. В широком диапазоне изменения комплекса K_* при θ_a=10° отношение X_l/X_S с точностью примерно $\pm5\%$ можно считать постоянным и равным 1,55. С ростом θ_a X_l/X_S монотонно уменьшается, причем в диапазоне θ_a=0 . . .20° зависимость является довольно слабой. Отличие X_l/X_S от значения, соответствующего θ_a=10°, находится в пределах примерно $\pm8\%$.

Корреляция продольных размеров по параметру K_* свидетельствует о том, что продольные размеры начального участка перерасширенной струи зависят, главным образом, от относи-

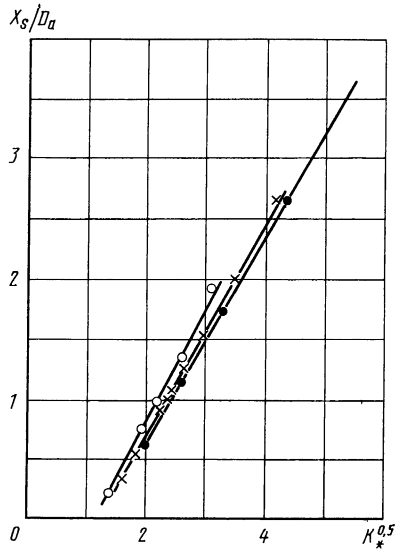


Рис. 2.2. Зависимость X_S/D_a от параметра K_*:

○ — $M_a=3$; × — $M_a=4$, ● — $M_a=5$

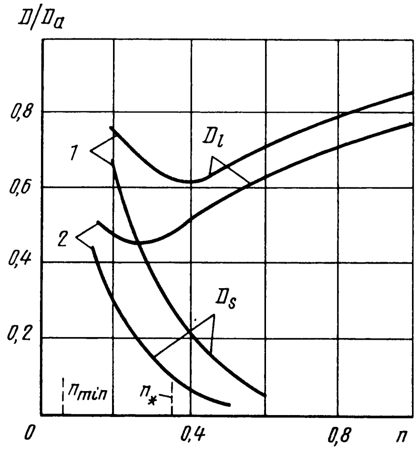


Рис. 2.3. Зависимости поперечных размеров перерасширенной струи от нерасчетности при $\gamma_a=1{,}2$, $\theta_a=10°$ и различных M_a:

1 — $M_a=3$; 2 — $M_a=5$

тельного импульса потока на выходе сопла. Действительно, относительный импульс, определенный как отношение импульса потока на выходе сопла к произведению статического давления в окружающей среде на площадь выхода сопла, при $\theta_a=0$ равен $\mathfrak{J}_a=(1+\gamma_a M_a^2)n$, т. е. при достаточно больших M_a $\mathfrak{J}_a \simeq \gamma_a n M_a^2$ и, значит, параметры K_* и $\mathfrak{J}_a$ совпадают с точностью до множителя $2/(\gamma_a+1)$, близкого к единице.

На рис. 2.3 приведены зависимости характерных поперечных размеров начального участка от нерасчетности при различных числах M_a. Видно, что с ростом n D_S резко уменьшается и при $n>0{,}5$ составляет менее 5% от диаметра выхода сопла. В приближении невязкого газа диаметр центрального скачка, строго говоря, должен монотонно уменьшаться, не обращаясь в нуль ни при каком значении нерасчетности. В экспериментах Д. А. Мельникова (1962 г.) при значениях n, близких к единице, на теневых фотографиях струи центральный скачок практически отсутствует. Им приведены соображения, показывающие, что в этих условиях вследствие влияния вязкости, отражение может происходить без образования центрального скачка. Максимальный диаметр центрального скачка, который еще различим на теневых фотографиях, соответствует значению $D_S/D_a \simeq 0{,}02$. Если принять, что при $D_S/D_a<0{,}02$ центральный скачок отсутствует, то в решении для невязкого газа отражение можно считать «регулярным» при $n>n_1 \simeq 0{,}65$ для $M_a=3$ и прочих условий, соответствующих рис. 2.3. Это минимальное значение нерасчетности n_1 уменьшается при увеличении M_a и γ_a, но растет при увеличении θ_a. С помощью теневых фотографий струй при $M_a \sim 3$, $\gamma_a = 1{,}4$ Д. А. Мельниковым проведены оценки максимального угла поворота потока в падающем скачке в окрестности точки отражения, когда отражение еще можно считать регулярным. Эта величина близка к 20°, что примерно в 1,7 раза меньше максимального угла поворота потока при регулярном отражении в случае плоского течения.

При $n < n_1$ D_S монотонно возрастает до некоторого максимального значения, соответствующего минимальной нерасчетности $n_{\min}$, при которой еще существует присоединенный скачок уплотнения на кромке сопла. В реальных условиях истечения, когда на стенке сопла имеется пограничный слой, падающий скачок начинает перемещаться внутрь сопла уже при некотором значении $n_* > n_{\min}$. Величина n_* определяется критическим отношением давлений в скачке уплотнения для пограничного слоя, при превышении которого происходит отрыв пограничного слоя от стенки [1]. Для ориентировки значения $n_{\min}$ и n_* указаны на рис. 2.3 для $M_a = 4$ в случае турбулентного пограничного слоя. Хотя из-за наличия пограничного слоя течение со скачком уплотнения, присоединенным к кромке сопла, при $n < n_*$ не реализуется, результаты расчетов перерасширенных струй, вытекающих из конических сопл, при $n < n_*$ имеют не только теоретический, но и практический интерес применительно к профилированным соплам реактивных двигателей. Как показано в подразд. 3.1.6, струю, вытекающую из профилированного сопла с неравномерным распределением параметров в выходном сечении, приближенно можно моделировать струей, вытекающей из эквивалентного по отношению площадей критического и выходного сечений конического сопла, причем у этого эквивалентного конического сопла эффективное значение нерасчетности оказывается меньше, чем исходная нерасчетность профилированного сопла.

Зависимость D_S близка к линейной по n^{-1}. Немонотонное изменение D_l по n связано с тем, что при небольших n быстро растет диаметр центрального скачка, который приближается к срезу сопла, и поэтому отраженный скачок попадает на границу струи при большем значении диаметра, несмотря на увеличение начального поджатия границы струи при уменьшении нерасчетности.

Влияние γ_a и θ_a на поперечные размеры начального участка иллюстрируют зависимости на рис. 2.4 и 2.5. В диапазоне $\gamma_a = 1.2 \ldots 1.67$. D_S уменьшается, а D_l растет примерно на 20%. При изменении θ_a в диапазоне $0 \ldots 20°$ D_S возрастает более чем в 3 раза. В то же время влияние θ_a на D_l является значительно более слабым.

Обратимся к распределениям газодинамических величин. На рис. 2.6 приведены распределения статического давления не-

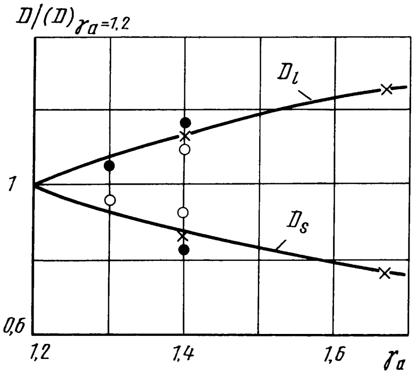


Рис. 2.4. Влияние γ_a на поперечные размеры перерасширенной струи ($\theta_a=10°$):

○ — $M_a=3$, $n=0,4$, × — $M_a=4$, $n=0,3$; ● — $M_a=5$, $n=0,25$

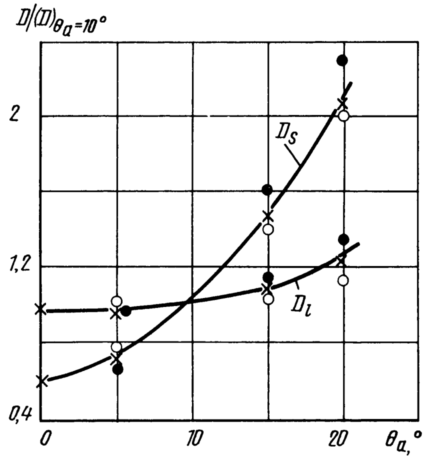


Рис. 2.5. Влияние θ_a на поперечные размеры перерасширенной струи при $\gamma_a=1,2$ (обозначения, как на рис. 2.4)

посредственно за падающим скачком при различных числах M_a и значениях n. Для этих распределений характерно наличие минимума, который с увеличением M_a и n уменьшается и смещается вниз по потоку. Поскольку на границе струи $p/p_\infty=1$, то из рис. 2.6 следует, что с увеличением M_a растет неравномерность в распределении статического давления поперек сжатого слоя между падающим скачком и границей струи. Если на значительной длине струи статическое давление растет в направлении к границе, то вблизи тройной точки давление за падающим скачком может быть больше давления на границе струи.

Немонотонное изменение статического давления непосредственно за падающим скачком характерно только для струй с $\theta_a>0$ и обусловлено взаимодействием двух факторов. С одной стороны, при удалении от среза сопла вследствие конического расширения потока растет число Маха и, соответственно, уменьшается дав-

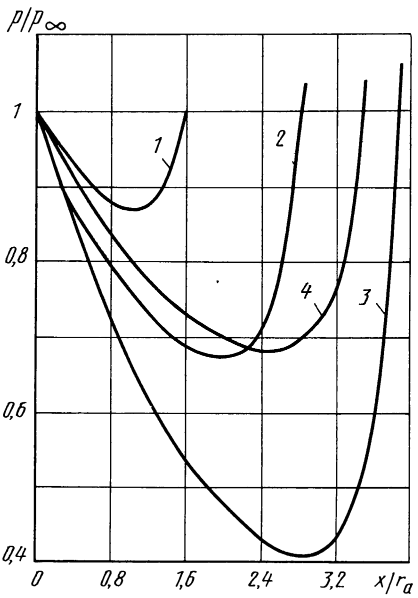


Рис. 2.6. Изменение давления за падающим скачком при различных M_a и n ($\gamma_a=1,2$, $\theta_a=10°$):

1 — $M_a=3$, $n=0,4$, *2* — $M_a=3$, $n=0,7$; *3* — $M_a=3$, $n=0,98$, *4* — $M_a=5$, $n=0,4$

ление перед падающим скачком, а с другой стороны, вследствие осесимметричности течения растет интенсивность падающего скачка. При $\theta_a=0$ статическое давление за падающим скачком начинает возрастать сразу за срезом сопла. Чем больше θ_a, тем меньше величина минимума и тем ближе он расположен к диску Маха. Так, если при $\theta_a=5^\circ$ расстояние до точки минимума давления за падающим скачком равно примерно 0,4 X_S, то при $\theta_a=15^\circ$ оно равно 0,75 X_S.

В случае $\theta_a \neq 0$ неравномерность в распределении статического давления поперек сжатого слоя увеличивается при приближении n к единице. Так, при $n \simeq 1$ минимальное статическое давление в сжатом слое примерно в 2,5 раза меньше, чем давление в окружающей среде.

Статическое давление за падающим скачком и его распределение в сжатом слое слабо зависят от отношения удельных теплоемкостей газа.

Статическое давление непосредственно за центральным скачком может в несколько раз превышать давление в окружающей среде не только при $\theta_a=0$ (что является очевидным), но и при $\theta_a>0$ (рис. 2.7). Поэтому гипотеза о том, что центральный скачок образуется в той точке на оси струи, в которой статическое давление за ним равно окружающему давлению, неприменима в случае перерасширенной струи.

В области за отраженным скачком изменение статического давления поперек струи невелико. Для иллюстрации на рис. 2.8 приведены распределения статического давления вдоль различных линий тока струи, изображенной на рис. 2.9. Линии тока отмечены значениями функции тока ψ, представляющей собой отношение расхода газа, соответствующего данной линии тока, к суммарному расходу газа, вытекающего из сопла. Естественно, что на границе струи давление за отраженным скачком всегда больше, чем давление в окружающей среде. Поэтому в конце начального участка поток является недорасширенным и образуется новая бочка струи. Величина нерасчетности для второй бочки изменяется в пределах 1,5 . . . 2,3 для $M_a=3 \ldots 5$, $n=0{,}25 \ldots 1$.

Распределение статического давления на рис. 2.8 указывает на быстрый разгон потока в центрированной волне разрежения, образующейся при отражении скачка уплотнения от границы струи, и последующее торможение потока под действием волн сжатия, идущих от границы второй бочки струи. При этом, как видно на рис. 2.9, в области второй бочки происходит пересечение характеристик второго семейства, в результате чего образуется висячий скачок уплотнения.

Распределения числа Маха в сжатом слое между падающим скачком и границей струи близки к линейным, а само изменение числа Маха довольно слабое. При $\theta_a>0$ изменение числа Маха непосредственно за падающим скачком является немонотонным,

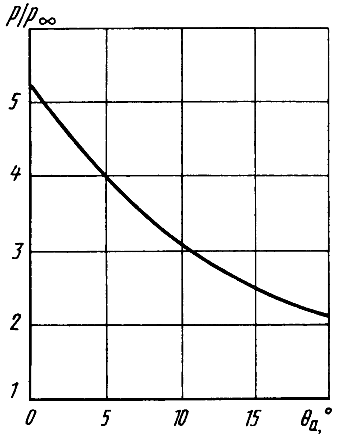


Рис. 2.7. Зависимость давления за центральным скачком от θ_a при $M_a=4$, $n=0{,}3$, $\gamma_a=1{,}2$

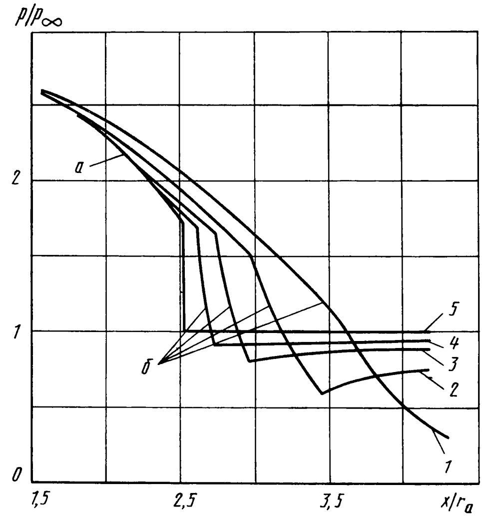


Рис. 2.8. Распределение давления вдоль линий тока за отраженным скачком:

а — отраженный скачок; *б* — линии тока; *1* — $\psi=0{,}03$, *2* — $\psi=0{,}36$, *3* — $\psi=0{,}64$; *4* — $\psi=0{,}81$; *5* — $\psi=1$

как и изменение статического давления. При удалении от выходного сечения сопла число Маха за падающим скачком возрастает до максимального значения, которое превышает число Маха на границе струи примерно на 15% при $n \simeq 1$. Однако вблизи центрального скачка число Маха за падающим скачком меньше, чем на границе струи в пределах примерно 10% в диапазоне изменения параметров $M_a=3 \ldots 5$, $n=0{,}1 \ldots 1$. При этом температура газа в соответствии с характером изменения числа Маха возрастает в направлении от границы струи к падающему скачку,

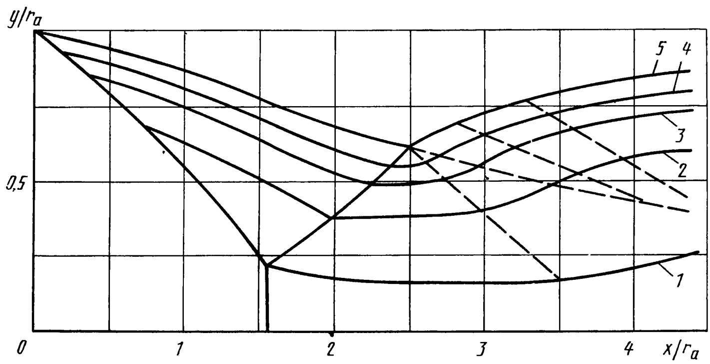


Рис. 2.9. Картина течения в перерасширенной струе при $M_a=3$, $n=0{,}4$, $\gamma_a=1{,}2$, $\theta_a=10°$:

1 — $\psi=0{,}03$; *2* — $\psi=0{,}36$, *3* — $\psi=0{,}64$, *4* — $\psi=0{,}81$, *5* — $\psi=1$, пунктир — характеристики второго семейства а плотность газа падает вследствие увеличения потерь полного давления в падающем скачке при удалении от выхода сопла. Изменение плотности газа в поперечном сечении сжатого слоя вблизи точки отражения возрастает с увеличением M_a и n и может составлять 30 . . . 50%.

Распределение плотности газа, отнесенной к плотности на границе струи, так же как и распределение статического давления, довольно слабо зависит от отношения удельных теплоемкостей газа.

2.1.2. Недорасширенная затопленная струя

Численное исследование течения на начальном участке сверхзвуковой недорасширенной струи невязкого газа было проведено в работах [3, 25, 16]. Далее приводятся, в основном, результаты этих работ, охватывающие широкий диапазон изменения определяющих параметров: нерасчетность $n=1 \ldots 10^6$, $M_a=2 \ldots 10$, $\theta_a=0 \ldots 20°$, $\gamma_a=1{,}2 \ldots 1{,}67$.

На рис. 2.10 показана форма начального участка недорасширенной струи при различных значениях нерасчетности. В качестве координат выбраны величины $x/r_a n^{0,5}$, $y/r_a n^{0,5}$. Из этого рисунка следует, что при увеличении нерасчетности форма струи в таких координатах приближается к автомодельной. Это означает, что асимптотическая зависимость всех характерных размеров начального участка от нерасчетности является прямо пропорциональной $n^{0,5}$. В дальнейшем приняты обозначения характерных линейных размеров: X_S, D_S — расстояние до центрального скачка и его диаметр; X_{mS}, D_{mS} — расстояние до максимального диаметра висячего скачка и максимальный диаметр; X, D — расстояние до максимального диаметра границы струи и максимальный диаметр; X_l, D_l — длина начального участка и диаметр границы струи в конце начального участка.

Отметим, что продольные размеры изменяются прямо пропорционально $n^{0,5}$ начиная с $n \geqslant 10 \ldots 15$. Для поперечных размеров переход к асимптотической зависимости наступает при больших значениях нерасчетности, чем для продольных. Заметим, что величина $(D/D_a-1)/n^{0,5}$ перестает зависеть от нерасчетности быстрее. Наиболее медленно выходит на асимптотическую зависимость D_S; при увеличении нерасчетности D_S изменяется прямо пропорционально $(n^{0,5}-1)$. Следует заметить, что и в случае недорасширенной струи в некотором небольшом диапазоне значений нерасчетности вблизи $n=1$ наблюдается регулярное отражение без образования центрального скачка. На рис. 2.11 из работы [2] приведены экспериментальные данные различных авторов по влиянию полуугла раствора конического сопла θ_a и числа M_a на диапазон значений нерасчетности, в котором реализуется течение в струе с регулярным отражением висячего скачка.

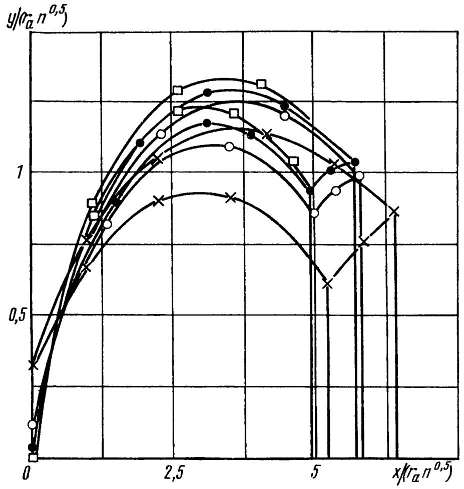


Рис. 2.10. Форма недорасширенной струи при различных нерасчетностях ($M_a=3,1$, $\gamma_a=1,4$, $\theta_a=10°$): × — $n=10$; ○ — $n=10^2$; ● — $n=10^3$, □ — $n=10^6$

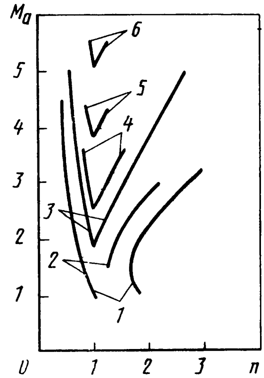


Рис. 2.11. Влияние M_a и θ_a на характер отражения висячего скачка: 1 — $\theta_a=0$; 2 — $\theta_a=5°$; 3 — $\theta_a=12°$; 4 — $\theta_a=15°$, 5 — $\theta_a=20°$; 6 — $\theta_a=24°$

Видно, что диапазон значений нерасчетности увеличивается с ростом M_a и уменьшается с ростом θ_a. Из приведенных результатов следует, что для каждого числа M_a существует предельное значение θ_{a*}, при превышении которого регулярное отражение скачка уплотнения в струе не реализуется. На основании экспериментальных данных для струи воздуха ($\gamma_a=1,4$), истекающей из конического сопла, зависимость θ_{a*} от M_a имеет вид [2]

$$\theta_{a*}=\operatorname{arctg}(0,22\sqrt{M_a-1}). \qquad (2.1)$$

С увеличением M_a растут продольные и поперечные размеры начального участка, однако влияние M_a на поперечные размеры, как и в случае перерасширенной струи, является более слабым.

Продольные размеры X_{mS} и X, отнесенные к M_a, с увеличением последнего монотонно уменьшаются и стремятся к некоторым асимптотическим значениям. X_S и X_l, отнесенные к M_a, изменяются немонотонно: эти величины имеют минимум при $M_a \simeq 2$. Приближенно с точностью около 10% можно считать, что продольные размеры начального участка в диапазоне чисел $M_a=1\ldots5$ и $n \gg 1$ прямо пропорциональны $M_a n^{0,5}$.

Пропорциональность продольных размеров $M_a n^{0,5}$ означает, что в недорасширенной струе, как и в перерасширенной, продольные размеры определяются, в первую очередь, относительным импульсом газа на выходе сопла, причем в данном случае они примерно пропорциональны корню квадратному из относительного импульса.

Максимальные диаметры висячего скачка и границы струи с увеличением M_a монотонно возрастают, но при больших числах $M_a > 3$ эти параметры слабо зависят от M_a. Диаметр центрального скачка и диаметр границы струи в конце начального участка с увеличением M_a изменяются немонотонно, проходя через максимум при $M_a \simeq 2 \ldots 3$.

Таким образом, рассматривая влияние нерасчетности и числа Маха сопла на форму начального участка недорасширенной струи, можно сделать вывод, что с ростом M_a и n форма струи, по крайней мере, в области до центрального скачка должна приближаться к автомодельной в координатах $x/(r_a M_a n^{0,5})$, $y/(r_a n^{0,5})$. Этот вывод подтверждается также в подразд. 2.1.3, где проведен анализ подобия нерасчетных струй в гиперзвуковом приближении.

Рассмотрим количественный характер влияния γ_a и θ_a на размеры начального участка недорасширенной струи. Расстояние до центрального скачка и длина начального участка изменяются пропорционально $\gamma_a^{0,5}$. Расстояния до максимальных диаметров висячего скачка и границы струи также изменяются примерно пропорционально $\gamma_a^{0,5}$, но только при больших значениях нерасчетности. При относительно небольших значениях нерасчетности характер влияния зависит от конкретных значений M_a, n, θ_a. Например, при $n=10$ X_{mS} даже уменьшается с ростом γ_a (рис. 2.12).

Влияние γ_a на поперечные размеры также зависит от конкретных значений других определяющих параметров, прежде всего от нерасчетности. При относительно небольших нерасчетностях $n \simeq 10-10^2$ численный расчет дает примерно обратно пропорциональную зависимость D, D_{mS} от γ_a. Согласно же теоретическому

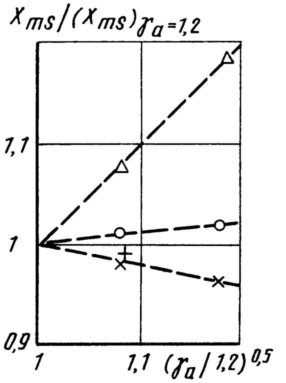


Рис. 2.12. Влияние γ_a на X_{mS} ($\theta_a=10°$):

	n	M_a
×	10	3,1
+	10	5
○	10^2	3,1
△	10^4	3,1

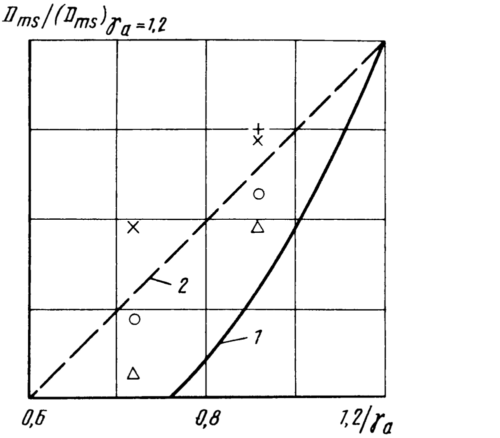


Рис. 2.13. Влияние γ_a на D_{mS} (обозначения, как на рис. 2.12):
1 — теоретическая зависимость, *2* — $D_{mS} \sim \gamma_a^{-1}$

анализу подобия сильно недорасширенных струй (см. подразд. 2.1.4) D_m изменяется обратно пропорционально $(\gamma_a-1)^{0,5}$. С увеличением n численные результаты приближаются к этой теоретической зависимости (рис. 2.13). Характер влияния γ_a на D_l примерно такой же как на D. В то же время зависимость D_S от γ_a приближенно можно считать обратно пропорциональной γ_a^2.

В диапазоне значений полууглов наклона конического сопла $\theta_a=0\ldots20°$ влияние θ_a на размеры начального участка недорасширенной струи невелико и находится в пределах примерно $10\ldots15\%$. В частности, расстояние до центрального скачка практически не зависит от θ_a.

Анализ результатов численного решения показывает, что при увеличении нерасчетности отношение любого продольного размера начального участка недорасширенной струи, например, к расстоянию до центрального скачка слабо зависит от определяющих параметров. Для приближенных оценок с погрешностью $\pm10\ldots20\%$ при $n\geqslant10$, $M_a=1\ldots5$, $\gamma_a=1{,}2\ldots1{,}67$, $\theta_a=0\ldots20°$ можно принять

$$X_{mS}/X_S=0{,}62,\quad X/X_S=0{,}75,\quad X_l/X_S=1{,}15. \tag{2.2}$$

Отношение максимальных диаметров границы струи и висячего скачка слабо зависит от определяющих параметров, и при $n\geqslant10$ приближенно можно считать

$$D/D_{mS}=1{,}1+0{,}5n^{-0{,}5}. \tag{2.3}$$

Корреляция значений диаметра границы струи в конце начального участка, и особенно диаметра центрального скачка, отнесенных к максимальному диаметру висячего скачка, оказывается неудовлетворительной вследствие различного характера влияния таких определяющих параметров, как M_a и γ_a на D_S и D_m.

Интересно отметить, что в относительных координатах x/X_S, y/D_{mS} форма висячего скачка и границы струи близки к универсальным. Для примера на рис. 2.14 показана форма висячего скачка. Наибольшие отклонения координат висячего скачка от универсальной кривой наблюдаются за сечением, где его диаметр максимален.

Рассмотрим распределение газодинамических параметров в сжатом слое между границей струи и висячим скачком уплотнения. Течение в изоэнтропийном ядре струи соответствует расширению газа в вакуум и было рассмотрено в работе [54] (см. также подразд. 1.2.1).

На рис. 2.15, 2.16 показано изменение статического давления и плотности в сжатом слое струи вдоль линий с фиксированным значением нормированной координаты ξ в зависимости от безразмерной координаты $x/(r_a n^{0,5})$. На этих рисунках параметры отнесены к своим постоянным значениям на границе струи ($\xi=1$). Линия $\xi=0$ указывает параметры за висячим скачком.

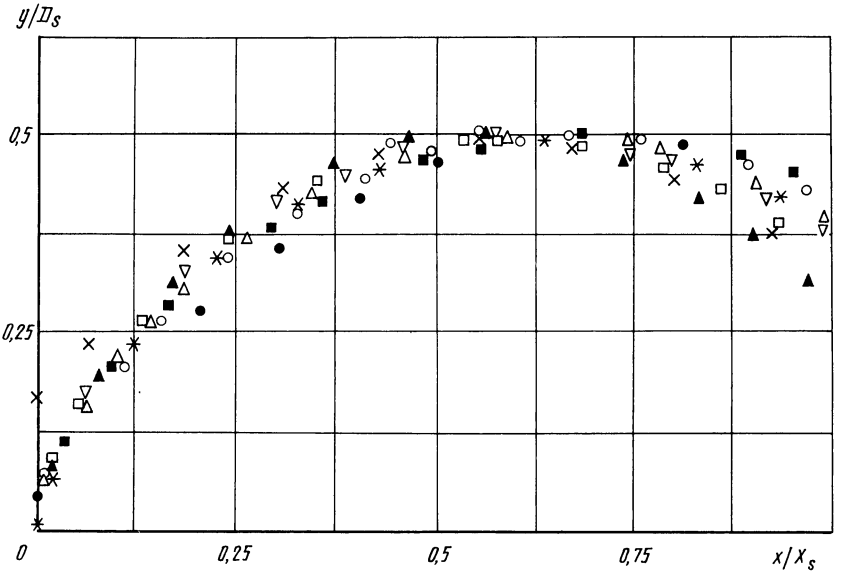


Рис. 2.14. Форма висячего скачка недорасширенной струи в относительных координатах:

	M_a	n	γ_a	θ_a°
×	3,1	10	1,4	10
Δ	3,1	10^2	1,4	10
*	3,1	10^6	1,4	10
■	2	10^2	1,4	10
▲	5	10^2	1,4	10
○	3,1	10^2	1,2	10
□	3,1	10^2	1,67	10
●	3,1	10^2	1,4	0
▽	3,1	10^2	1,4	20

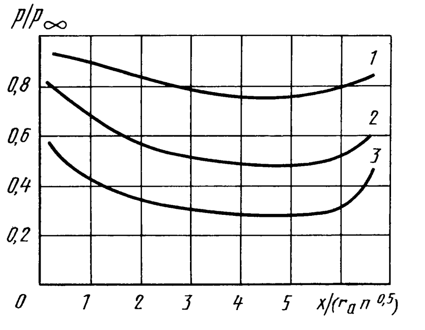


Рис. 2.15. Распределение давления в сжатом слое струи (M_a=3,1, $n=10^4$, γ_a=1,4, θ_a=10°):

1 — ξ=0,89; 2 — ξ=0,56, 3 — ξ=0

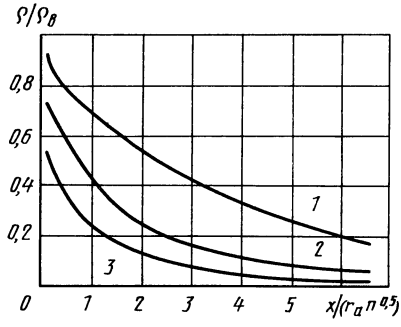


Рис. 2.16. Распределение плотности в сжатом слое струи (условные обозначения как на рис. 2.15)

Существенная неравномерность в распределении статического давления и плотности поперек сжатого слоя возникает уже на относительно небольшом расстоянии от сопла. Увеличение давления в направлении к границе струи обусловлено кривизной линий тока в сжатом слое. При удалении от сопла плотность монотонно уменьшается вдоль линий ξ=const, а для распределений статического давления характерным является наличие минимума, как и в случае перерасширенной струи при $\theta_a>0$ (см. рис. 2.6). Минимальное давление за висячим скачком в 3 ... 3,5 раза меньше давления в окружающей среде и слабо зависит от определяющих параметров. Центральный скачок образуется в области повышения давления за висячим скачком.

Отметим, что распределения давления в координатах $p/p_\infty = f(x/(r_a n^{0,5}))$ слабо зависят от нерасчетности. Поэтому существенное повышение давления внутри сжатого слоя наблюдается и при небольших значениях нерасчетности. Напротив, изменение таких параметров, как температура и число Маха при небольших нерасчетностях $n \leqslant 10$ поперек сжатого слоя невелико. Например, при $n=10$ изменение температуры поперек сжатого слоя находится в пределах примерно 20 ... 25%, причем вблизи сопла температура газа за висячим скачком меньше, а вблизи точки отражения больше, чем на границе струи.

При больших нерасчетностях характер распределения таких газодинамических величин, как температура, плотность, число Маха существенно изменяется. На рис. 2.17 показано распределение температуры в двух сечениях сжатого слоя при $n=10^6$.

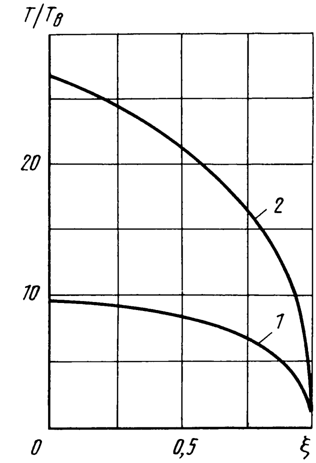


Рис. 2.17. Распределение температуры в сжатом слое струи при $n=10^6$ ($M_a=3{,}1$; $\gamma_a=1{,}4$; $\theta_a=10°$):

1 — $x/(r_a M_a n^{0,5})=0{,}355$, *2* — $x/(r_a M_a n^{0,5})=1{,}32$

Температура отнесена к ее значению на границе струи. Рисунок показывает, что при большой нерасчетности вблизи границы струи образуется тонкий слой газа с низкой температурой и большой плотностью. Существование этого слоя обусловлено тем, что при удалении от среза сопла существенно возрастает интенсивность висячего скачка, а вследствие осесимметричности течения низкоэнтропийный слой газа, который прошел через слабую ударную волну вблизи выхода сопла, с увеличением диаметра струи становится тоньше и прижимается к границе струи. Это приводит к большим градиентам энтропии вблизи границы струи и большим градиентам изменения таких величин, как плотность, температура, число Маха.

Распределение в сжатом слое струи относительного давления p/p_∞ практически не зависит от γ_a. Температура газа за висячим скачком, отнесенная к значению на границе струи, уменьшается с ростом γ_a. Давление и температура газа за висячим скачком возрастают при увеличении θ_a.

К важному выводу приводит анализ распределений скорости.

Прежде всего отметим, что изменение продольной u и поперечной v составляющих скорости, а следовательно, и угла наклона θ вектора скорости к оси струи в поперечном сечении невелико, хотя в продольном направлении v и θ меняются существенно.

При достаточно больших числах M_a продольная составляющая скорости в струе сохраняется почти постоянной. На рис. 2.18 приведены распределения $u/W_{\max}$ вдоль границы струи и непосредственно за висячим скачком.

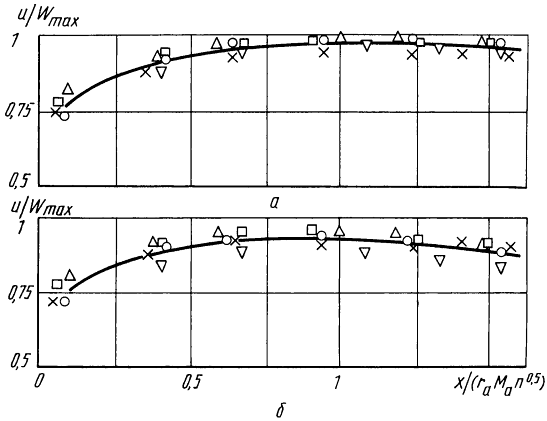
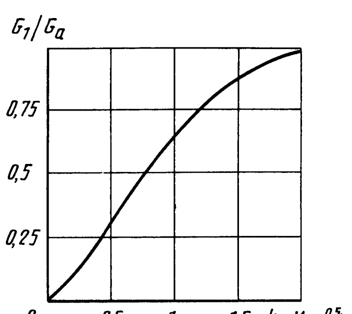


Рис. 2.18. Распределения $u/W_{\max}$ вдоль границы струи (*а*) и висячего скачка (*б*) при $\theta_a=10°$:

	—	△	×	○	▽	□
M_a	4	4	4	4	3	5
γ_a	1,3	1,4	1,3	1,3	1,3	1,3
n	10^4	10^4	10^2	10^6	10^4	10^4

Эти численные результаты подтверждают, что для недорасширенных струй с достаточно большими числами M_a выполняется закон плоских сечений и применима нестационарная аналогия.



Важную особенность течения в сильно недорасширенных струях иллюстрирует рис. 2.19. Здесь показана зависимость отношения расхода газа G_1 в области сжатого слоя между висячим скачком и границей струи к общему расходу газа через сопло G_a.

Рис. 2.19. Изменение относительного расхода газа в сжатом слое струи ($\mathrm{M}_a=3{,}1$; $n=10^2$; $\gamma_a=1{,}4$; $\theta_a=10°$)

При удалении от среза сопла все большая масса газа перемещается в сжатый слой. Внутри сжатого газа значительная масса газа приходится на окрестность границы, что связано с отмеченными ранее особенностями течения в вихревом слое. Зависимость G_1/G_a от $x/(r_a \mathrm{M}_a n^{0,5})$ близка к универсальной, особенно при больших числах $\mathrm{M}_a \geqslant 3$.

Рассмотрим теперь особенности течения, связанные с образованием в недорасширенной струе центрального скачка уплотнения. На рис. 2.20 изображена форма начального участка недорасширенной струи, а также показано несколько линий тока (различные значения ψ). Видно, что центральный скачок занимает значительную часть поперечного сечения струи. Однако расход газа, прошедшего через близкий к прямому центральный скачок и имеющего поэтому существенно более низкое полное давление, чем газ в остальной части струи, мал по сравнению с суммарным расходом. В широком диапазоне изменения определяющих параметров $\mathrm{M}_a=1 \ldots 5$, $\gamma_a=1{,}2 \ldots 1{,}67$, $n \geqslant 10$ величина этого расхода не превышает 20%, причем при прочих одинаковых условиях он уменьшается с ростом M_a и γ_a.

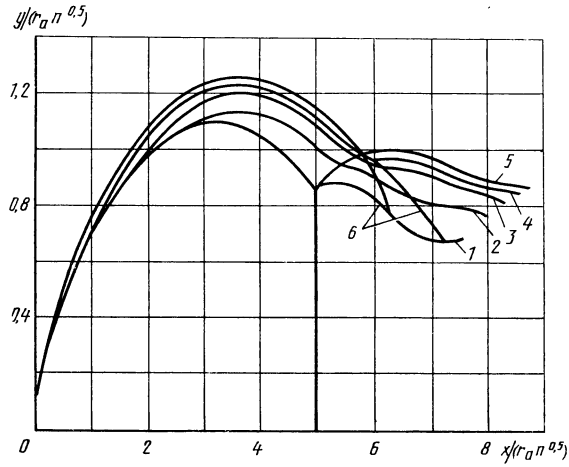


Рис. 2.20. Картина течения в недорасширенной струе при $\mathrm{M}_a=3{,}1$; $n=10^2$; $\gamma_a=1{,}4$; $\theta_a=10°$:

1 — $\psi=0{,}09$; *2* — $\psi=0{,}36$; *3* — $\psi=0{,}64$; *4* — $\psi=0{,}81$, *5* — $\psi=1$, *6* — центрированная волна разрежения

Образующаяся в тройной точке контактная поверхность вначале всегда направлена от оси струи. Поэтому дозвуковой поток за центральным скачком сначала тормозится, а затем ускоряется до скорости звука уже в области второй бочки струи под действием волны разрежения, образовавшейся при попадании отраженного скачка на границу струи.

Статическое давление непосредственно за центральным скачком превышает статическое давление в окружающей среде, например, в полтора раза при $M_a=3$, $\gamma_a=1{,}2$, $n=10$. При прочих равных условиях статическое давление за центральным скачком растет с увеличением M_a, γ_a, а при увеличении нерасчетности p/p_∞ несколько уменьшается и затем стабилизируется.

В точке пересечения отраженного скачка с границей струи статическое давление за ним больше давления в окружающей среде. Отношение этих давлений можно рассматривать как нерасчетность второй бочки струи. Отметим, что эта нерасчетность существенно меньше начальной нерасчетности при $n>10$; так при изменении начальной нерасчетности в диапазоне $10\leqslant n\leqslant 10^3$ при $M_a=3$, $\theta_a=10°$, $\gamma_a=1{,}4$ нерасчетность второй бочки струи увеличивается лишь от 2,66 до 3,57.

На рис. 2.21 изображены распределения давления за отраженным скачком вдоль линий тока струи, показанной на рис. 2.20. Начало резкого уменьшения давления вдоль линии тока соответствует начальной характеристике центрированной волны разрежения, образующейся на границе струи. После прохождения линии тока через эту волну разрежения наблюдается повышение давления в волнах сжатия, идущих от границы второй бочки и от линии тангенциального разрыва. Последующее падение давления связано с тем, что эти волны сжатия отражаются от границы струи в виде волн разрежения.

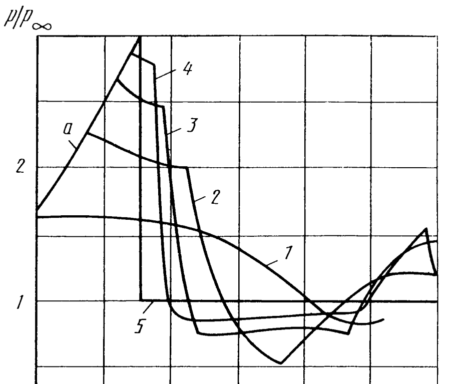


Рис. 2.21. Распределение давления вдоль линий тока за отраженным скачком:

а — отраженный скачок, *1* — $\psi=0{,}09$; *2* — $\psi=0{,}36$; *3* — $\psi=0{,}64$, *4* — $\psi=0{,}81$, *5* — $\psi=1$

Можно отметить следующую особенность, отличающую картину течения в области второй бочки при большой нерасчетности $n\gg 1$ по сравнению с рассмотренным ранее случаем перерасширенной струи. В случае перерасширенной струи (см. рис. 2.8) наблюдается значительное перерасширение потока вблизи линии тангенциального разрыва и в поле течения образуется висячий скачок. В случае недорасширенной струи новый висячий скачок не образуется, по крайней мере, в области расчета, ограниченной справа характеристикой первого семейства, выходящей из точки линии тангенциального разрыва, в которой поток за центральным скачком становится звуковым. А в поперечном сечении струи вблизи этой точки $(x/(r_a n^{0,5})=7,1)$ статическое давление близко к давлению в окружающей среде. Можно считать, что дальнейшее развитие струи будет определяться, главным образом, процессом вязкой диссипации, а не волновыми процессами. Сечение, где поток за центральным скачком становится звуковым, можно принять за «изобарическое» сечение струи.

2.1.3. Автомодельные свойства

Течение в неизобарической сверхзвуковой затопленной струе идеального газа зависит от безразмерных определяющих параметров M_a, n, γ_a, θ_a, которые, таким образом, в общем случае играют роль критериев подобия. С увеличением M_a скорость газа в струе приближается к максимальной, а форма сжатого слоя струи приобретает форму тонкого тела. Поэтому течение в струе должно обладать характерными свойствами течений, возникающих при обтекании тонких тел потоком с большой сверхзвуковой скоростью. Выясним, какими обобщенными критериями определяется течение в струе при $M_a \gg 1$, $\theta_a \ll 1$.

При обтекании тонкого тела гиперзвуковым потоком газа изменения параметров газа в скачке уплотнения удовлетворяют следующим оценкам:

$$\Delta u \sim \tau^2 W_1,\ \Delta v \sim \tau W_1,\ \Delta p \sim \tau^2 \varrho_1 W_1^2,\ \Delta\varrho \sim \varrho_1, \tag{2.4}$$

где индексом «1» обозначены параметры газа перед скачком; τ — малый параметр, характеризующий угол наклона скачка уплотнения.

Рассмотрим случай гиперзвуковой перерасширенной затопленной струи, вытекающей из сопла, в котором реализуется течение от источника. В соответствии с этими оценками, приняв в качестве параметров с индексом 1 параметры на выходе сопла, введем следующие безразмерные переменные, обозначенные штрихом:

$$\begin{gathered} z = z'\alpha r_a,\ y = (1+\alpha\tau y')r_a; \\ u = (1+\tau^2 u')W_a,\ v = \tau v' W_a; \\ p = \tau^2 p' \varrho_a W_a^2,\ \varrho = \varrho' \varrho_a, \end{gathered} \tag{2.5}$$

где z, y — цилиндрические координаты с началом в полюсе источника; α — безразмерный масштабный параметр, который будет определен далее.

Подставим в дифференциальные уравнения осесимметричного движения идеального газа новые безразмерные переменные и отбросим члены порядка τ^2 по сравнению с единицей. В результате получим систему уравнений:

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial z'}\varrho'(1+\alpha\tau y')+\frac{\partial}{\partial y'}\varrho' v'(1+\alpha\tau y')=0;$$

уравнения движения

$$\frac{\partial u'}{\partial z'}+v'\frac{\partial u'}{\partial y'}=-\frac{1}{\varrho'}\frac{\partial p'}{\partial z'};$$

$$\frac{\partial v'}{\partial z'}+v'\frac{\partial v'}{\partial y'}=-\frac{1}{\varrho'}\frac{\partial p'}{\partial y'};$$

уравнение сохранения энтропии

$$\frac{\partial}{\partial z'}\frac{p'}{(\varrho')^{\gamma_a}}+v'\frac{\partial}{\partial y'}\frac{p'}{(\varrho')^{\gamma_a}}=0.$$

Преобразованные уравнеия содержат параметры γ_a и $\alpha\tau$.

Кроме системы дифференциальных уравнений для определения течения в сжатом слое струи имеем также граничные условия на линии тангенциального разрыва (граница струи) и на падающем скачке уплотнения. Если перейти в граничных условиях к новым переменным и упростить их, отбросив члены порядка τ^2, получим:

на границе струи $F_1(z', y')=0$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z'}+v'\frac{\partial F_1}{\partial y'}=0;\quad p'=(\gamma_a n \mathrm{M}_a^2\tau^2)^{-1};$$

на падающем скачке уплотнения $F_2(z', y')=0$

$$\varrho_1'\left(\frac{\partial F_2}{\partial z'}+v_1'\frac{\partial F_2}{\partial y'}\right)=\varrho_2'\left(\frac{\partial F_2}{\partial z'}+v_2'\frac{\partial F_2}{\partial y'}\right);$$

$$\varrho_1' u_1'\left(\frac{\partial F_2}{\partial z'}+v_1'\frac{\partial F_2}{\partial y'}\right)+p_1'\frac{\partial F_2}{\partial y'}=\varrho_2' u_2'\left(\frac{\partial F_2}{\partial z'}+v_2'\frac{\partial F_2}{\partial y'}\right)+p_2'\frac{\partial F_2}{\partial y'};$$

$$\varrho_1'\left(\frac{\partial F_2}{\partial z'}+v_1'\frac{\partial F_2}{\partial y'}\right)\left[\frac{(v_1')^2}{2}+\frac{\gamma_a}{\gamma_a-1}\frac{p_1'}{\varrho_1'}\right]=$$

$$=\varrho_2'\left(\frac{\partial F_2}{\partial z'}+v_2'\frac{\partial F_2}{\partial y'}\right)\left[\frac{(v_2')^2}{2}+\frac{\gamma_a}{\gamma_a-1}\frac{p_2'}{\varrho_2'}\right],$$

где индексом «1» и «2» обозначены параметры непосредственно перед и за скачком уплотнения.

Поток перед падающим скачком соответствует гиперзвуковому источнику. Поэтому в рассматриваемом приближении в точке с координатами (z', y') параметры газа с индексом «1» равны

$$\varrho_1'=(\alpha\theta_a z')^{-2},\quad u_1'=0,\quad v_1'=(1+\alpha\tau y')(\alpha\tau z')^{-1},$$

$$p'_1 = (\varrho')^{\gamma_a}(\gamma_a M_a^2 \tau^2)^{-1}$$

Поскольку величина α является пока произвольной, то, положив $\alpha = 1/\theta_a$, можно исключить θ_a из выражения для плотности газа перед падающим скачком. Тогда система дифференциальных уравнений и граничные условия будут содержать в качестве параметров только γ_a, n, $M_a\tau$ и τ/θ_a. Выразим $M_a\tau$ и τ/θ_a через определяющие параметры задачи. В качестве малого параметра τ можно выбрать угол наклона падающего скачка уплотнения струи на кромке сопла. Тогда из соотношения для изменения статического давления в косом скачке следует

$$M_a\tau = \left(\frac{1}{n} + \frac{\gamma_a - 1}{\gamma_a + 1}\right)^{1/2}\left(\frac{2\gamma_a}{\gamma_a + 1}\right)^{-1/2} \tag{2.6}$$

и

$$\frac{\tau}{\theta_a} = \left(\frac{1}{n} + \frac{\gamma_a - 1}{\gamma_a + 1}\right)^{1/2}\left(\frac{2\gamma_a}{\gamma_a + 1} M_a^2 \theta_a^2\right)^{-1/2}. \tag{2.7}$$

Таким образом, для рассматриваемой задачи критериями подобия являются γ_a, n и произведение $M_a\theta_a$. Поэтому в координатах (z', y') при $\gamma_a = \mathrm{const}, n = \mathrm{const}$ струи с различными значениями параметров M_a и θ_a, удовлетворяющих условию $M_a\theta_a = \mathrm{const}$, должны быть автомодельными.

Критерий подобия $M_a\theta_a$ аналогичен известному параметру подобия при обтекании тонких тел потоком с большой сверхзвуковой скоростью [65]. Критерий подобия перерасширенных струй получен для $M_a \gg 1$ и $\theta_a \ll 1$. Возможность его использования при умеренных сверхзвуковых числах M_a можно установить на основе анализа результатов численного решения в точной постановке.

Координатами подобия являются z', y', причем $y' = (y/r_a - 1)(\alpha\tau)^{-1}$ и $z' = z/(\alpha r_a) = z\theta_a/r_a$. Поскольку $\alpha\tau$ должно быть постоянно, то в качестве поперечной координаты подобия можно взять просто величину y/r_a. Кроме того, поскольку $z/r_a = \mathrm{ctg}\,\theta_a + x/r$, то при $\theta_a \ll 1$ $z' \approx 1 + \theta_a x/r_a$, и поэтому в качестве продольной координаты подобия примем величину $x\theta_a/r_a$ или, что равносильно, $x/(r_a M_a)$.

На рис. 2.22 в указанных координатах подобия показана форма перерасширенных струй. Для вариантов с $n = 0{,}7$ при $M_a\theta_a = \mathrm{const}$ форма начального участка в целом близка к автомодельной. Поскольку при таком значении нерасчетности диаметр центрального скачка мал и фактически отражение можно считать регулярным, форма струи сохраняется автомодельной и за точкой отражения. Если же условия течения таковы, что образуется центральный скачок заметного размера ($M_a = 5$, $n = 0{,}25$), то положение отраженного скачка не является автомодельным.

Данные из рис. 2.22 показывают, что критерий подобия гиперзвуковых перерасширенных струй оказывается пригодным уже при умеренном числе $M_a = 3$.

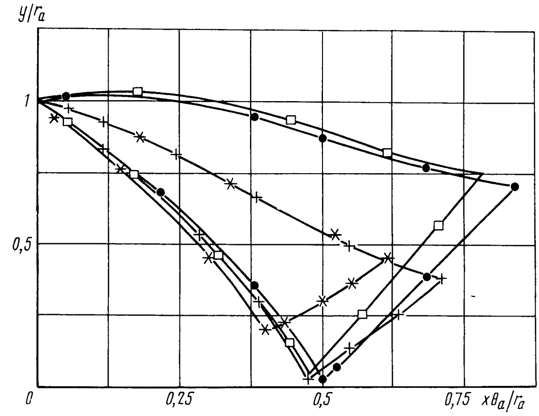


Рис. 2.22. Форма перерасширенных струй в координатах подобия ($\gamma_a=1{,}2$):

	□	+	*	●
M_a	3	10	5	10
θ_a°,	10	5	10	3
n	0,7	0,25	0,25	0,7

Все варианты на рис. 2.22 подобраны таким образом, что величина $[2\gamma_a/\gamma_a+1)]nM_a^2\theta_a^2=\text{const}$. В этом случае, как видно из рис. 2.22, даже при $n=\text{var}$ и $\gamma_a=\text{var}$ форма падающего скачка хорошо коррелируется этим параметром. Это связано с тем, что величина $[2\gamma_a/\gamma_a+1)]nM_a^2\theta_a^2$ определяет начальный угол наклона падающего скачка в координатах подобия. Действительно, если $y_1=y_1(x)$ — уравнение висячего скачка, то

$$\left.\frac{dy_1}{d(x\theta_a)}\right|_{x=0}=1-\frac{\tau}{\theta_a}=1-\left(\frac{1+n\dfrac{\gamma_a-1}{\gamma_a+1}}{\dfrac{2\gamma_a}{\gamma_a+1}nM_a^2\theta_a^2}\right)^{1/2}\simeq 1-\left(\frac{2\gamma_a}{\gamma_a+1}nM_a^2\theta_a^2\right)^{-1/2}. \qquad (2.8)$$

При $n<1$ величиной $n\dfrac{\gamma_a-1}{\gamma_a+1}$ обычно можно пренебречь по сравнению с единицей, поэтому начальный угол наклона падающего скачка практически зависит только от $\dfrac{2\gamma_a}{\gamma_a+1}n$.

В то же время на рис. 2.22 видно, что при $[2\gamma_a/(\gamma_a+1)]nM_a^2\theta_a^2=\text{const}$ форма границы струи зависит также от нерасчетности. Начальный угол наклона границы струи определяется выражением

$$\left.\frac{dy_\xi}{d(x\theta_a)}\right|_{x=0}=\frac{1}{\theta_a}(\theta_a-\delta)=1-\frac{\delta}{\theta_a},$$

где δ — угол поворота потока в скачке уплотнения на кромке сопла, который равен

$$\delta=\frac{M_a^2\tau^2-1}{\tau\left(\dfrac{\gamma_a+1}{2}M_a^2-M_a^2\tau^2+1\right)}\approx\frac{M_a^2\tau^2-1}{\dfrac{\gamma_a+1}{2}\tau M_a^2} \qquad (2.9)$$

Следовательно,

$$\left.\frac{dy_2}{d(x\theta_a)}\right|_{x=0}=1-\frac{M_a^2\tau^2-1}{\frac{\gamma_a+1}{2}\tau M_a^2\theta_a}\approx 1-\frac{2}{\gamma_a+1}\left(1-\frac{2\gamma_a}{\gamma_a+1}n\right)\frac{\tau}{\theta_a}, \qquad (2.10)$$

где τ/θ_a — определено соотношением (2.7).

Поэтому в отличие от начального угла наклона падающего скачка начальный угол наклона границы струи в координатах подобия зависит при $[2\gamma_a/(\gamma_a+1)]\,nM_a^2\theta_a^2=\text{const}$ от нерасчетности струи.

Из формул (2.8) и (2.10) следует, что начальные углы падающего скачка и границы струи слабо зависят от γ_a, поскольку величины $2\gamma_a/(\gamma_a+1)$ и $2/(\gamma_a+1)$ в широком диапазоне изменения $\gamma_a=1{,}1\ \ldots\ 1{,}67$ близки к единице. Этим, в частности, объясняется относительно слабое влияние γ_a на форму начального участка перерасширенной струи, которое отмечалось ранее.

При $\theta_a=0$ критерий подобия вырождается, поскольку $M_a\theta_a=0$.

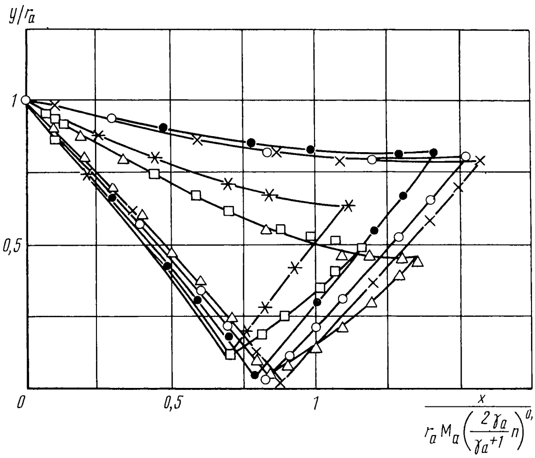


Рис. 2.23. Форма перерасширенных струй в координатах подобия при $\theta_a=0$:

	●	×	○	△	□	*
M_a	3	10	5	10	4	4
γ_a	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,67
n	0,7	· 0,7	0,7	0,3	0,3	0,3

В этом случае перерасширенные струи с различными значениями M_a, но при $\gamma_a=\text{const}$ и $n=\text{const}$ должны быть автомодельными в координатах $x/(r_aM_a)$, y/r_a. На рис. 2.23 построена форма начального участка перерасширенных струй в координатах $x/\left[r_aM_a\left(\frac{2\gamma_a}{\gamma_a+1}n\right)^{0,5}\right]$, y/r_a. В этих координатах начальный угол наклона падающего скачка очень слабо зависит от n и γ_a, благодаря чему форма падающего скачка близка к автомодельной и при $n=\text{var}$, $\gamma_a=\text{var}$. В то же время начальный угол наклона границы струи в тех же координатах существенным образом зависит от нерасчетности, что является причиной отсутствия подобия границ струй при различных n.

Для автомодельных струй в сечениях $x\theta_a/r_a=\mathrm{const}$ (или $x/(r_a\mathrm{M}_a)=\mathrm{const}$) должны быть подобными профили параметров u', v', ϱ' и p'. Рассмотрим безразмерные величины $\theta\mathrm{M}_a$, ϱ/ϱ_a и p/p_∞. Величина $\theta\mathrm{M}_a$ близка к v', $\varrho/\varrho_a=\varrho'$, а $p/p_\infty=\frac{\gamma_a+1}{2}\left(1+n\frac{\gamma_a-1}{\gamma_a+1}\right)p'$. На рис. 2.24 показаны распределения указанных величин в сжатом слое между падающим скачком ($\xi=0$) и границей ($\xi=1$) для двух струй с $n=0{,}7$, контуры которых приведены на рис. 2.22. Видно, что поперечные распределения параметров близки к автомодельным.

Сечение $x\theta_a/r_a=0{,}45$, для которого построены распределения параметров на рис. 2.24, расположено вблизи точки отражения падающего скачка. Отметим, что в тех случаях, когда D_S мал ($\leqslant 0{,}05D_a$), удовлетворительная автомодельность распределений параметров имеет место не только до сечения отражения, но на всей длине начального участка. Если же образуется центральный скачок значительного размера, то за точкой отражения подобие отсутствует, поскольку само положение точки отражения не является автомодельным.

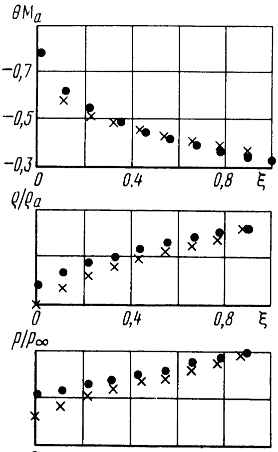


Рис. 2.24. Подобие профилей параметров в сжатом слое перерасширенной струи при $x\theta_a/r_a=0{,}45$: ● — $\mathrm{M}_a=3$, $\theta_a=10°$, × — $\mathrm{M}_a=10$, $\theta_a=3°$

Для анализа подобия недорасширенных затопленных струй используем тот же подход, что и в случае перерасширенной струи. При больших числах M_a характерная продольная составляющая скорости U в изоэнтропийном ядре является примерно постоянной, причем $U\approx W_a\approx W_{\max}$. В то же время, как показано в подразд. 2.1.4, внутренняя энергия газа $e_a=c_vT_a$ на срезе сопла расходуется на создание кинетической энергии поперечного движения газа. Поэтому характерная скорость разлета в поперечном направлении равна $V\sim\sqrt{e_a}$, а характерный угол наклона потока ϑ определяется отношением

$$\vartheta=V/U\approx\left[\gamma_a(\gamma_a-1)\right]^{-1/2}\mathrm{M}_a^{-1}. \qquad (2.11)$$

Здесь принято $U=W_a$.

Проведем оценку характерных размеров начального участка сильно недорасширенных струй. Кинетическая энергия поперечного движения расходуется на работу по преодолению давления газа затопленного пространства, т. е.

$$G_a e_a \approx p_\infty U \pi Y^2,$$

где G_a — расход газа через сопло; Y — характерный поперечный размер (радиус) струи. Таким образом,

$$Y \approx (e_a G_a / \pi p_\infty U)^{1/2}, \tag{2.12}$$

а характерный продольный размер X имеет порядок

$$X \sim Y/\vartheta \sim (G_a U / \pi p_\infty)^{1/2}. \tag{2.13}$$

Для сопла с равномерным потоком на выходе в предположении $U = W_a$ из соотношений (2.12) и (2.13) получим выражения

$$X \sim (\gamma_a n)^{1/2} \mathrm{M}_a r_a, \quad Y \approx [n/(\gamma_a - 1)]^{1/2} r_a. \tag{2.14}$$

С учетом соотношений (2.14) введем преобразование координат

$$x = x' \mathrm{M}_a n^{0,5} r_a, \quad y = y' n^{0,5} r_a, \tag{2.15}$$

где x', y' — безразмерные координаты порядка единицы.

В соответствии с оценками для изменения параметров в скачке уплотнения, образующемся при обтекании тонкого тела гиперзвуковым потоком, параметры газа в сжатом слое сильно недорасширенной струи должны иметь следующий порядок:

$$u \sim (1 + \tau^2) W_1, \quad v \sim \tau W_1, \quad p \sim \tau^2 \varrho_1 W_1^2, \quad \varrho \sim \varrho_1, \tag{2.16}$$

где индексом «1» обозначены местные параметры перед висячим скачком; τ — малая величина, имеющая порядок характерного угла наклона потока перед скачком. При $\mathrm{M}_a \gg 1$ можно положить $W_1 \approx W_a \approx W_{\max}$.

Используем выражение (1.57) для распределения плотности в изоэнтропийном ядре. При $\mathrm{M}_a \gg 1$ $\theta_{\max} \approx [2/(\gamma_a - 1)]\,\mathrm{M}_a^{-1}$ и, считая полярный угол ω малым, получим

$$\varrho_1/\varrho_a \approx A(\gamma_a)(x/r_a \mathrm{M}_a)^{-2} f(\gamma_a, y\mathrm{M}_a/x) = A(\gamma_a) n^{-1} (x')^{-2} f(\gamma_a, y'/x').$$

Таким образом, $\varrho \sim \varrho_1 \sim \varrho_a n^{-1}$.

С учетом соотношения (2.11) положим $\tau = \mathrm{M}_a^{-1}$. Из выражения (2.16) следует, что давление за висячим скачком $p \sim p_\infty$.

Теперь введем новые безразмерные переменные, отмеченные штрихом:

$$u = (1 + u'/\mathrm{M}_a^2) W_a, \quad v = v' W_a / \mathrm{M}_a, \quad p = p' p_\infty, \quad \varrho = \varrho' \varrho_a / n.$$

Если теперь перейти в дифференциальных уравнениях и соотношениях на скачке уплотнения к этим новым переменным и отбросить члены порядка $\tau^2 = \mathrm{M}_a^{-2}$ по сравнению с единицей, то преобразованные уравнения и соотношения не будут содержать никаких параметров, кроме γ_a.

Рассмотрим, какой вид примут граничные условия перед висячим скачком и на границе струи. В изоэнтропийном ядре струи в точке с координатами x', y' новые безразмерные параметры течения при пренебрежении членами порядка M_a^{-2} по сравнению с единицей можно записать следующим образом:

$$\varrho' = A(\gamma_a)(x')^{-2} f(\gamma_a, y'/x'),\quad p' = (\varrho')^{\gamma_a} n^{1-\gamma_a},$$
$$u' = 0,\quad v = y'/x'. \tag{2.17}$$

На границе струи $p' = 1$. Таким образом, граничные условия содержат дополнительный параметр $n^{1-\gamma_a}$. Поэтому, строго говоря, недорасширенные струи являются автомодельными в координатах $x/(r_a M_a n^{0,5})$, $y/(r_a n^{0,5})$ при любых $M_a \gg 1$, но при $\gamma_a = \text{const}$ и $n = \text{const}$. Нерасчетность струи входит только в выражение для давления перед висячим скачком, причем в такой форме, что при $n \gg 1$ $p' \to 0$ и нерасчетность должна исключаться из числа критериев подобия.

Приведенные ранее рассуждения верны вдали от среза сопла, поскольку в окрестности среза сопла течение в изоэнтропийном ядре струи не является автомодельным и, кроме того, интенсивность скачка мала. Результаты численных расчетов показывают, что влияние области течения около среза сопла оказывается несущественным.

Подобие струй при больших нерасчетностях в координатах, отнесенных к $n^{0,5}$, отмечалось в подразд. 2.1.2. На рис. 2.25 в координатах подобия (2.15) построена форма висячего скачка при различных числах M_a. Видно, что по мере увеличения числа Маха сопла, а практически при $M_a \geqslant 3$ форма висячего скачка становится автомодельной. Этот же вывод относится и к границе струй.

Несмотря на то, что проведенный анализ подобия неприменим к центральному скачку, который близок к прямому, тем не менее положение его в недорасширенной струе хорошо коррелируется координатой подобия.

Подобие недорасширенных струй можно рассматривать как частный случай общего закона подобия гиперзвуковых неизобарических затопленных струй, $M_a \vartheta = \text{const}$, где ϑ — характерный угол расширения струи. Если для перерасширенной струи характерным углом расширения является θ_a, то в случае недорасширенной струи при $\theta_a = 0$ и $M_a \gg 1$ характерный угол расширения пропорционален M_a^{-1}. Поэтому произведение M_a на характерный угол расширения является постоянной величиной.

Если рассматриваются недорасширенные струи с $\theta_a > 0$, то необходимо учесть влияние θ_a на характерный угол расширения. Это можно сделать с помощью следующих рассуждений [63]. При $\theta_a > 0$ кинетическая энергия свободного разлета газа в

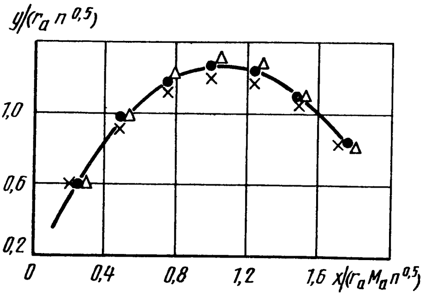


Рис. 2.25. Форма висячего скачка в координатах подобия при различных M_a ($n=10^4$, $\gamma_a=1{,}4$, $\theta_a=0°$):

× — $M_a=3{,}1$; ● — $M_a=5$; △ — $M_a=10$

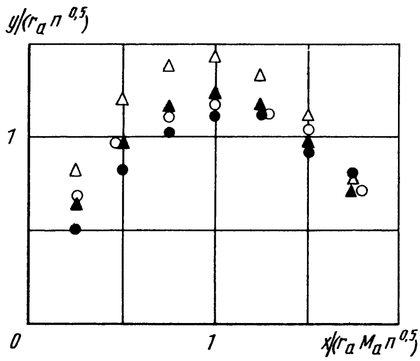


Рис. 2.26. Форма висячего скачка в координатах подобия при различных M_a и $\theta_a \neq 0$ ($n=10^2$; $\gamma_a=1{,}4$):

	●	○	▲	△
M_a	5	5	10	10
θ_a°,	0	10	5	10

поперечном направлении определяется не только внутренней энергией газа на срезе сопла, но и начальной кинетической энергией поперечного движения. Поэтому характерная скорость поперечного движения равна

$$V \sim \sqrt{e_a + \left\langle \frac{v_a^2}{2} \right\rangle},$$

где $\left\langle \frac{v_a^2}{2} \right\rangle$ — средняя кинетическая энергия поперечного движения на срезе сопла.

Для сопла, в котором реализуется течение от источника,

$$\left\langle \frac{v_a^2}{2} \right\rangle \approx \frac{1}{4}(\theta_a W_a)^2$$

и

$$V/W_a \approx \sqrt{\frac{1}{\gamma_a(\gamma_a - 1) M_a^2} + \frac{1}{4}\theta_a^2}.$$

Характерная продольная скорость $U \approx \langle u_a \rangle \approx \left(1 - \frac{1}{4}\theta_a^2\right) W_a$ и при небольших значениях θ_a, например при $\theta_a \leqslant 20°$, можно считать по-прежнему $U \approx W_a$.

В результате для ϑ получаем оценку

$$\vartheta \sim V/U \sim M_a^{-1} \sqrt{\frac{1}{\gamma_a(\gamma_a - 1)} + \frac{1}{4}(M_a \theta_a)^2}. \qquad (2.18)$$

Таким образом, для недорасширенных струй с $\theta_a > 0$ критерий подобия $M_a \vartheta = \mathrm{const}$ принимает вид $M_a \theta_a = \mathrm{const}$, как и в случае перерасширенных струй. Рис. 2.26 подтверждает этот результат. Здесь показана форма висячего скачка в координатах подобия при различных M_a и θ_a. Видно, что при $\theta_a > 0$ струи являются автомодельными только при $M_a\theta_a = \mathrm{const}$. Из соотношения (2.18) следует, что параметр $M_a\theta_a$ можно не учитывать при $M_a\theta_a \ll \ll 2/\sqrt{\gamma_a(\gamma_a-1)}$.

Параметр $M_a\theta_a$ влияет на поперечные размеры струи. Нетрудно показать, что

$$Y/(Y)_{\theta_a=0} \approx \sqrt{1+\frac{1}{4}\gamma_a(\gamma_a-1)(M_a\theta_a)^2}.$$

При $\gamma_a \leqslant 1{,}4$ и значениях $M_a\theta_a \leqslant 1$ влияние этого параметра на поперечные размеры струи находится в пределах примерно 5 . . . 10%.

Анализ подобия недорасширенных струй показывает, что в сходственных сечениях $x/(r_a M_a n^{0,5}) = \mathrm{const}$ должны быть подобными профили следующих величин: p/p_∞, $\varrho n/\varrho_a$, T/T_a, vM_a/W_a. Для иллюстрации на рис. 2.27 приведены профили некоторых этих величин в сходственных сечениях сжатого слоя струи при $n \geqslant 10^2$ и различных числах $M_a \geqslant 3$. Анализ распределений параметров позволил сделать следующие заключения.

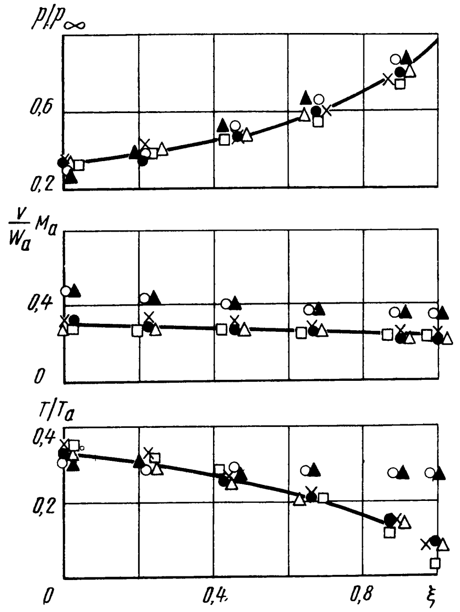


Рис. 2.27. Подобие профилей параметров в сжатом слое недорасширенной струи при $x/(r_a M_a n^{0,5}) = 1$ ($\gamma_a = 1{,}4$, $\theta_a = 0$):

	×	○	●	□	△	▲
M_a	3,1	5	5	5	10	10
n	10^4	10^2	10^4	10^6	10^4	10^2

1. При постоянном значении нерасчетности (даже относительно небольшом, как $n = 10^2$) и различных числах M_a распределения параметров близки к автомодельным.

2. С увеличением нерасчетности профили параметров приближаются к универсальным, не зависящим от нерасчетности, при этом профили p/p_∞ и vM_a/W_a становятся автомодельными поперек всего сжатого слоя, а в распределении температуры (а также плотности) автомодельность нарушается вблизи границы струи из-за образования тонкого низкоэнтропийного слоя газа. Параметры на границе струи соответствуют изоэнтропийному расширению от начальных условий на срезе сопла. Поэтому при изменении нерасчетности относительная температура T/T_a и величина $n\varrho/\varrho_a$ изменяются на границе струи пропорционально

$n^{(1-\gamma_a)/\gamma_a}$, а за висячим скачком согласно анализу подобия не зависят от нерасчетности. Следовательно, с увеличением нерасчетности должно возрастать различие в температуре и плотности газа за висячим скачком и на границе струи.

В заключение остановимся на подходе к анализу подобия. сильно недорасширенных струй, предложенному в работе [37].

Поскольку размеры струи при больших нерасчетностях значительно превышают размер выходного сечения сопла, то можно рассмотреть сопло как источник газа, характеризуемый величинами G_a, J_a, $W_{\max}$, γ_a, r_a, где G_a, J_a — расход и осевая составляющая импульса газа на выходе сопла. К этим начальным условиям нужно добавить еще величину p_∞, определяющую граничные условия. Из указанных размерных величин можно образовать две независимые величины с размерностью длины

$$R_1 = \left[G_a W_{\max}/(\pi p_\infty)\right]^{1/2};$$
$$R_2 = \left[(G_a W_{\max} - J_a)/(\pi p_\infty)\right]^{1/2}. \tag{2.19}$$

Нетрудно показать, что R_2 определяет поперечный размер струи. Для этого следует записать уравнение сохранения количества движения в проекции на ось струи для контура, ограниченного границей струи, слева — выходным сечением сопла, а справа — максимальным сечением струи. Имеем

$$J_a + p_\infty(F_m - F_a) = \int_{F_m} (p + \varrho u^2) dF. \tag{2.20}$$

При $n \gg 1$ в соотношении (2.20) можно пренебречь величиной F_a по сравнению с F_m. Кроме того, в подынтегральном выражении можно пренебречь давлением и положить $u \approx W_{\max}$. В результате из выражения (2.20) получим для Y — максимального радиуса границы струи выражение, совпадающее со второй формулой (2.19). Поэтому естественно принять R_2 за характерный поперечный, а R_1 — продольный размеры струи.

С помощью π-теоремы теории размерностей можно показать, что в рассматриваемом случае течение в струе, представленное в соответствующих безразмерных переменных, должно зависеть от трех критериев подобия γ_a, $J_1 = J_a/(G_a W_{\max})$ и r_a/R_2. Но $r_a/R_2 \to 0$ при $n \gg 1$, поэтому остаются лишь два критерия.

Для сопла с равномерным течением на выходе ($\theta_a = 0$) величины J_1, R_1 и R_2 следующим образом выражаются через M_a и γ_a:

$$J_1 = \left(1 + \frac{1}{\gamma_a M_a^2}\right)\left[1 + \frac{2}{(\gamma_a - 1) M_a^2}\right]^{-0,5}; \tag{2.21}$$

$$R_1/r_a = (\gamma_a n)^{0,5} M_a \left[1 + \frac{2}{(\gamma_a - 1) M_a^2}\right]^{0,25}; \tag{2.22}$$

$$R_2/r_a = n^{0,5}\left[\gamma_a M_a^2\left(\sqrt{1 + \frac{2}{(\gamma_a - 1) M_a^2}} - 1\right) - 1\right]^{0,25}. \tag{2.23}$$

Анализ подобия [37] справедлив, вообще говоря, при любых числах $M_a \geqslant 1$. Согласно [37] недорасширенные струи являются автомодельными в координатах x/R_1, y/R_2 при $\gamma_a = \text{const}$, $\mathcal{J}_1 = \text{const}$.

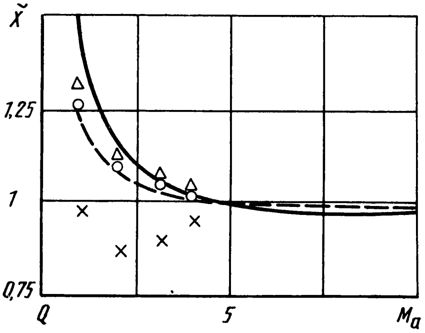


Рис. 2.28 Сравнение теоретических зависимостей от M_a характерного продольного размера с численными расчетами ($\gamma_a = 1{,}4$; $\theta_a = 0$; $n = 10^2$):

× — X_s
△ — X
○ — X_{ms}

Согласно соотношению (2.21) $\mathcal{J}_1$ сильно изменяется при небольших сверхзвуковых числах M_a и близко е единице при $M_a > 5$. Проведенный в работе [37] анализ результатов численных расчетов недорасширенных струй в диапазоне параметров $M_a = 3 \ldots 5$, $\gamma_a = 1{,}3 \ldots 1{,}5$, $n = 10^2 \ldots 10^7$ показал, что формы границ струй и висячих скачков в координатах x/R_1, y/R_2 слабо зависит от γ_a и $\mathcal{J}_1$

При больших числах M_a

$$R_1/r_a = (\gamma_a n)^{0,5} M_a; \qquad (2.24); \quad R_2/r_a = [n/(\gamma_a - 1)]^{0,5}. \qquad (2.25)$$

Кроме того, $\mathcal{J}_1 = 1 + O(M_a^{-2})$. Следовательно, при $M_a \gg 1$ критерий $\mathcal{J}_1$ вырождается. Таким образом, снова приходим к ранее сформулированным в гиперзвуковом приближении условиям подобия: автомодельность струй в координатах $x/(r_a n^{0,5} M_a)$, $y/(r_a n^{0,5})$ при $\gamma_a = \text{const}$.

Рассмотрим возможность корреляции характерных размеров с помощью соотношений (2.22), (2.23) в широком диапазоне чисел $M_a = 1 \ldots 5$. На рис. 2.28, 2.29 в зависимости от M_a при $n = 10^2$ приведены характерные

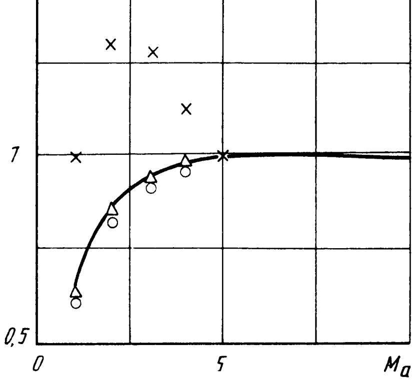


Рис. 2.29 Сравнение теоретических зависимостей от M_a характерного поперечного размера с численным расчетом ($\gamma_a = 1{,}4$; $\theta_a = 0$; $n = 10^2$):

× — D_s
△ — D
○ — D_{ms}

размеры струи из численных расчетов (значки), отнесенные к соответствующим величинам при $M_a=5$. Сплошные линии на этих рисунках обозначают теоретические зависимости, которые нетрудно получить из (2.22), (2.23). Видно, что влияние M_a на такие характерные размеры струи, как расстояние до максимального диаметра висячего скачка и до максимального диаметра границы струи вполне удовлетворительно учитывается теоретической зависимостью (2.22) вплоть до малых сверхзвуковых скоростей и лишь при $M_a=1$ отклонение достигает примерно 5%. На рис. 2.28 пунктиром обозначена зависимость, полученная с помощью формулы (2.66), для X. Формула (2.66) отличается от (2.22) тем, что вместо максимальной скорости $W_{\max}$ используется характерная продольная скорость U, определенная соотношением (2.55). Пунктирная зависимость лучше согласуется с численным расчетом для X при небольших сверхзвуковых числах M_a. Влияние M_a на D_{mS} и D хорошо учитывается вплоть до $M_a=1$. Вместе с тем теоретические зависимости (2.22), (2.23) значительно хуже, причем не только количественно, но и качественно, описывают влияние M_a на такие параметры как X_S и D_S.

2.1.4. Применение метода нестационарной аналогии для анализа неизобарических затопленных струй газа

В подразд. 1.3.1 показано, что для анализа гиперзвуковых струй применима нестационарная аналогия, согласно которой путем перехода от координаты x к времени t по соотношению $x=Ut$ двумерное стационарное течение сводится к соответствующему одномерному нестационарному. Такой переход, как известно, сам по себе не приводит к существенным математическим упрощениям. Упрощения достигаются с помощью использования тех или иных приближенных моделей. Например, в сильно недорасширенной струе несколько ниже по потоку от выхода сопла основная масса газа протекает в периферийной части вблизи границы струи. Это позволяет использовать модель тонкого сжатого слоя газа. Данный подход с различной степенью полноты применялся авторами ряда оригинальных работ [22, 63] для случая истечения недорасширенной струи и в работе [18] для перерасширенной струи.

Формально применимость метода нестационарной аналогии определяется условием постоянства продольной составляющей скорости газа в струе. Это имеет место, когда скорость примерно постоянна по модулю, а характерный угол наклона потока $\vartheta \ll 1$. При обтекании тонких тел гиперзвуковым потоком нестационарная аналогия сохраняет силу при характерном угле отклонения потока, равном приблизительно 0,25 [62, 65]. Если принять это значение за верхнюю границу допустимых значений ϑ и для ϑ принять формулу (2.11), то при $\gamma_a=1{,}4$ получим $M_a>5$. Вместе с тем в сильно недорасширенной струе $n \gg 1$ условие применимости нестационарной аналогии может иметь место и при меньших сверхзвуковых числах M_a, если не рассматривать присопловую зону течения, малую по сравнению с начальным участком в целом. Эта ситуация аналогична возникающей при использовании метода нестационарной аналогии для обтекания тонкого тела с затупленной носовой частью вблизи окрестности последней [35].

Далее будет показано, что если при $n \gg 1$ и $M_a < 5$ примириться с неизбежной потерей точности данного метода в присопловой области, то при удачном подборе характерной средней скорости U оказывается возможным получить вполне приемлемое по точности, а также физически наглядное и достаточно простое описание течения в большей части начального участка сильно недорасширенной струи и для этих условий.

Рассмотрим применение метода нестационарной аналогии в случае перерасширенной струи. Стационарное истечение гиперзвуковой перерасширенной струи эквивалентно одномерному неустановившемуся движению массы газа с заданным начальным распределением параметров при условии, что на границе этой массы поддерживается постоянное более высокое давление. При этом истечению струи из осесимметричного сопла соответствует движение цилиндрического объема газа (течение с цилиндрической симметрией), а из плоского сопла — движение плоского слоя (течение с плоской симметрией). Пусть R_s — траектория движения образующейся ударной волны, $R_b(t)$ — поверхность, на которой давление равно заданному давлению p_∞ в окружающем пространстве.

Выберем в качестве искомых функций расстояние R частицы газа от плоскости или оси симметрии течения, давление p и плотность ϱ. За независимые переменные примем время t и лангранжеву координату τ — момент совпадения частицы с ударной волной. Тогда уравнения неразрывности, движения и энергии, описывающие движение газа в слое между ударной волной и ограничивающей газ поверхностью постоянного давления, запишутся в виде

$$R^\nu \frac{\partial R}{\partial \tau} = -\frac{\varrho^1}{\varrho}(v^1 - \dot{R}_s) R_s^\nu; \tag{2.26}$$

$$R^\nu \frac{\partial p}{\partial \tau} = \varrho^1 (v^1 - \dot{R}_s) R_s^\nu \frac{\partial^2 R}{\partial t^2}; \tag{2.27}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{p}{\varrho^\gamma} = 0, \tag{2.28}$$

где $\nu = 0$ и 1 для течения с плоской и цилиндрической симметрией соответственно; индексом «1» сверху обозначим параметры газа непосредственно перед ударной волной; точка сверху обозначает дифференцирование. Граничные условия на ударной волне, т. е. при $t=\tau$ и $R=R_s$, имеют вид

$$p_s=\frac{2}{\gamma+1}\varrho^1 D^2-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}p^1; \tag{2.29}$$

$$\varrho_s=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\varrho^1\left[1+\frac{2}{\gamma-1}\left(\frac{a^1}{D}\right)^2\right]^{-1},$$

где $D=v^1-\dot{R}_s$ — скорость распространения ударной волны относительно газа; $a^1=(\gamma p^1/\varrho^1)^{1/2}$ — скорость звука непосредственно перед ударной волной. На поверхности постоянного давления, т. е. при $\tau=t_0$ (t_0 — начальный момент времени), должно выполняться условие

$$p=p_\infty. \tag{2.30}$$

Следуя работе [18], будем искать решение в виде разложений по параметру $\varepsilon=(\gamma-1)/(\gamma+1)$, характеризующему отношение плотностей перед ударной волной и за ней:

$$R=R_0+\varepsilon R_1+\ldots;$$

$$p=p_0+\varepsilon p_1+\ldots; \tag{2.31}$$

$$\varrho=\frac{\varrho_0}{\varepsilon}+\varrho_1+\ldots.$$

Для определения функций R_0, p_0, ϱ_0 получим систему уравнений:

$$\frac{\partial R_0}{\partial\tau}=0;\quad \frac{\partial p_0}{\partial\tau}=\varrho^1(v^1-\dot{R}_s)\frac{R_s^\nu}{R_0^\nu}\ddot{R}_0;\quad \frac{\partial}{\partial t}\frac{\varrho_0}{\varrho_0^\gamma}=0. \tag{2.32}$$

Интегрируя уравнения (2.32), получим

$$R_0=R_0(t);$$

$$p_0=p^*(t)+\frac{\ddot{R}_0}{R_0^\nu}\int_{\tau_0}^{\tau}\varrho^1(v^1-\dot{R}_s)R_s^\nu d\tau; \tag{2.33}$$

$$\varrho_0=\frac{p_0^{1/\gamma}}{\beta_0(\tau)}.$$

Для определения функций R_1, p_1, ϱ_1 получим систему

$$R_0^\nu\frac{\partial R_1}{\partial\tau}=-\frac{\varrho^1}{\varrho_0}(v^1-\dot{R}_s)R_s^\nu;$$

$$R_0^\nu\frac{\partial p_1}{\partial\tau}=\varrho^1(v^1-\dot{R}_s)R_s^\nu\left(\frac{\partial^2 R_1}{\partial t^2}-\nu\frac{\ddot{R}_0}{R_0}R_1\right); \tag{2.34}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p_1}{p_0}-\gamma\frac{\varrho_1}{\varrho_0}\right)=0.$$

Интегрирование соотношений (2.34) дает:

$$R_1=R_1^*(t)-\frac{1}{R_0^\nu}\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\frac{\varrho^1}{\varrho_0}(v^1-\dot{R}_s)R_s^\nu d\tau;$$

$$p_1=p_1^*(t)+\frac{1}{R_0^\nu}\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\varrho^1(v^1-\dot{R}_s)R_s^\nu\left[\frac{\partial^2 R_1}{\partial t^2}-\nu\frac{\ddot{R}_0}{R_0}R_1\right]d\tau; \qquad (2.35)$$

$$\varrho_1=\left[\frac{p_1}{p_0}-\beta_1(\tau)\right]\frac{\varrho_0}{\gamma}.$$

В формулах (2.33) и (2.35) $R_0(t)$, $R_1^*(t)$, $p_0^*(t)$, $p_1(t)$, $\beta_0(\tau)$ и $\beta_1(\tau)$ — произвольные функции, которые необходимо определить с помощью граничных условий (2.29) и (2.30); τ_0 — нижний предел интегрирования при вычислении интегралов — является произвольной величиной.

Будем считать, что функция $R_0(t)$ в формулах (2.33) есть закон распространения ударной волны. Используя соотношения (2.19), можно записать следующие условия на ударной волне для первых членов разложения искомых функций:

при $\tau=t$

$$R_0=R_0(t);\; R_1=0;$$

$$p_0=\varrho^1(v^1-\dot{R}_0)^2;\; p_1=-p^{-1}-\varrho^1(v^1-\dot{R}_0)^2; \qquad (2.36)$$

$$\varrho_0=\varrho^1\left[1+\frac{2}{\gamma-1}\left(\frac{a^1}{v^1-\dot{R}_0}\right)^2\right]^{-1};\; \varrho_1=0.$$

Условия (2.36) позволяют определить произвольные функции в формулах (2.33) и (2.35). После определения произвольных функций выражения для p_0 и ϱ_0 можно записать следующим образом:

$$p_0=\varrho^1(t)\left[v^1(t)-\dot{R}_0\right]^2-\frac{\ddot{R}_0}{R^\nu}\int\limits_{\tau}^{t}\varrho^1\left[v^1-\dot{R}_0(\tau)\right]R_0^\nu(\tau)\,d\tau; \qquad (2.37)$$

$$\varrho_0=\left\{1+\frac{2}{\gamma-1}\left[\frac{a^1}{v^1-\dot{R}_0(\tau)}\right]^2\right\}^{-1}\left\{\varrho^1\left[v^1-\dot{R}_0(\tau)\right]^2\right\}^{-1/\gamma}\varrho^1 p_0^{1/\gamma}$$

Здесь $\varrho^1(t)=\varrho^1(\tau)\big|_{\tau=t}$, $v^1(t)=v^1(\tau)\big|_{\tau=t}$.

Выражения для функций R_1, p_1, ϱ_1 имеют вид:

$$R_1=\frac{1}{R_0^\nu}\int\limits_{\tau}^{t}\left\{1+\frac{2}{\gamma-1}\left[\frac{a^1}{v^1-\dot{R}_0(\tau)}\right]^2\right\}\left\{\varrho^1\left[v^1-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\dot{R}_0(\tau)\right]^2\right\}^{1/\gamma}p_0^{-1/\gamma}(t,\tau)R_0^\nu(\tau)d\tau;$$

$$p_1=-p^1(t)-\varrho^1(t)\left[v^1(t)-\dot{R}_0(\tau)\right]^2+\nu\frac{\ddot{R}_0}{R_0^\nu}\int\limits_\tau^t\varrho^1\left[v^1-\right.$$

$$\left.-\dot{R}_0(\tau)\right]R_0^\nu(\tau)R_1d\tau-\frac{1}{R_0^\nu}\int\limits_\tau^t\varrho^1\left[v^1-\dot{R}_0(\tau)\right]R_0^\nu(\tau)\frac{\partial^2R_1}{\partial t^2}d\tau; \qquad (2.38)$$

$$\varrho_1=\frac{\varrho_0}{\gamma}\left[\frac{p_1}{p_0}+1+\frac{p^1}{\varrho^1\left[v^1-\dot{R}_0(\tau)\right]^2}\right].$$

Для окончательного решения задачи необходимо определить функцию $R_0(t)$ с помощью граничного условия (2.30). Должно выполняться следующее равенство: при $\tau=t_0$

$$p=p_0+\varepsilon p_1=p_\infty. \qquad (2.39)$$

В результате получим уравнение

$$(1-\varepsilon)\varrho^1(t)\left[v^1(t)-\dot{R}_0\right]^2-\varepsilon p^1(t)-\frac{\ddot{R}_0}{R_0^\nu}\int\limits_{t_0}^t\varrho^1\times$$

$$\times\left[v^1-\dot{R}_0(\tau)\right]R_0^\nu(\tau)d\tau+\nu\varepsilon\frac{\ddot{R}_0}{R_0^{\nu+1}}\int\limits_{t_0}^t\varrho^1\left[v^1-\right.$$

$$\left.-R_0(\tau)\right]R_0^\nu(\tau)R_1(t,\tau)d\tau-\frac{\varepsilon}{R_0^\nu}\int\limits_{t_0}^t\varrho^1\left[v^1-\right.$$

$$\left.-\dot{R}_0(\tau)\right]R_0^\nu(\tau)\frac{\partial^2R_1}{\partial t^2}d\tau=p_\infty. \qquad (2.40)$$

Если заменить в подынтегральных выражениях функцию R_1 на R_0, что внесет погрешность $0(\varepsilon^2)$, то получим интегродифференциальное уравнение для определения функции R_0:

$$(1-\varepsilon)\varrho^1(t)\left[v^1(t)-R_0\right]^2-\varepsilon p^1(t)-(1+\varepsilon)\frac{\ddot{R}_0}{R_0^\nu}\int\limits_{t_0}^t\varrho^1\left[v^1-\right.$$

$$\left.-\dot{R}_0(\tau)\right]R_0^\nu(\tau)d\tau+\nu\varepsilon\frac{R_0}{R_0^{\nu+1}}\int\limits_{t_0}^t\varrho^1\left[v^1-\right.$$

$$\left.-\dot{R}_0(\tau)\right]R_0^{\nu+1}(\tau)d\tau=p_\infty. \qquad (2.41)$$

В предположении, что форма скачка $R_s=R_s(t)$ есть нулевое приближение по ε для R, имеем $R_s\equiv R_0$, т. е. форма скачка фактически определяется из соотношения (2.41).

Положение поверхности постоянного давления $R_b=R_b(t)$ определяется значениями функции $R=R(t,\tau)$ при $\tau=t_0$. Отсюда в рассматриваемом первом приближении по ε имеем

$$R_b=R_0(t)+\varepsilon R_1(t,t_0),$$

где $R_0(t)$ определено из выражения (2.41), а R_1 — из (2.38) при $\tau = t_0$. В результате для определения функции $R_b = R_b(t)$ получим уравнение:

$$R_b = R_0 + \frac{\varepsilon}{R_0^\nu} \int_{t_0}^{t} \left\{ 1 + \frac{2}{\gamma - 1} \left[\frac{a^1}{v^1 - \dot{R}_0(\tau)} \right]^2 \right\} \times \tag{2.42}$$

$$\times \left\{ \varrho^1 \left[v^1 - R_0(\tau) \right]^2 \right\}^{1/\gamma} p_0^{-1/\gamma}(t, \tau) \left[v^1 - R_0(\tau) \right] R_0^\nu(\tau) d\tau.$$

Функция $p_0(t, \tau)$ известна из соотношений (2.37).

Для решения уравнений (2.41), (2.42) необходимо знать ρ^1, p^1, v^1, a^1 как функции времени. Будем считать, что струя истекает из гиперзвукового сопла, в котором реализуется течение от источника. Тогда параметры газа перед скачком можно определить из соотношений для источника, которые запишем с учетом предположений, что скорость газа W_a на выходе из сопла близка к максимальной, а угол полураствора сопла θ_a мал:

$$\varrho = \left(\frac{x + x_0}{r_a} \theta_a \right)^{-(\nu+1)} \varrho_a, \quad v^1 = \frac{R}{x + x_a} W_a,$$

$$p^1 = \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_a} \right)^\gamma p_a, \quad a^1 = \left(\gamma \frac{p^1}{\varrho^1} \right)^{1/2}, \tag{2.43}$$

где $x_0 = r_a/\theta_a$ — расстояние от полюса источника до выходного сечения сопла.

Примем, что

$$t = (x + x_0)/W_a$$

и введем безразмерные величины $R' = R/r_a$, $t' = t/t_0$, где $t_0 = x_0/W_a = r_a/(W_a \theta_a)$. Тогда соотношения (2.43) примут вид (штрих у безразмерных величин в дальнейшем опущен)

$$\varrho^1 = t^{-(\nu+1)} \varrho_a; \quad v^1 = R t^{-1} W_a \theta_a; \quad p^1 = t^{-(\nu+1)\gamma} p_a;$$
$$a^1 = t^{-(\gamma+1)(\gamma-1)/2} W_a M_a^{-1}. \tag{2.44}$$

После подстановки соотношений (2.44) в (2.41) уравнение для определения положения ударной волны $R_0(t)$ можно записать следующим образом

$$(1 - \varepsilon) \left(\frac{R_0}{t} - \frac{dR_0}{dt} \right)^2 - \frac{\varepsilon}{\gamma M_a^2 \theta_a^2} t^{-(\nu+1)\gamma} - (1 +$$

$$+ \varepsilon) R_0^{-\nu} \frac{d^2 R_0}{dt^2} \int_1^t t^{-(\nu+1)} \left[\frac{R_0(\tau)}{\tau} - \frac{dR_0(\tau)}{d\tau} \right] R_0^\nu(\tau) d\tau +$$

$$+ \nu \varepsilon R_0^{-(\nu+1)} \frac{d^2 R_0}{dt^2} \int_1^t t^{-(\nu+1)} \left[\frac{R_0(\tau)}{\tau} - \frac{dR_0(\tau)}{d\tau} \right] R_0^{\nu+1}(\tau) d\tau = \frac{1}{\gamma n M_a^2 \theta_a^2} \tag{2.45}$$

Первый интеграл в уравнении (2.45) берется в конечном виде. В результате для определения $R_0(t)$ получим уравнение

$$(1-\varepsilon)\left(\frac{R_0}{t}-\frac{dR_0}{dt}\right)^2-\frac{\varepsilon}{\gamma M_a^2\theta_a^2}t^{-(\nu+1)\gamma}+$$
$$+\frac{d^2R_0}{dt^2}\left\{\frac{1+\varepsilon}{(\nu+1)R_0^\nu}\left[\left(\frac{R_0}{t}\right)^{\nu+1}-1\right]+\nu\frac{\varepsilon}{R_0^{\nu+1}}\int_1^t t^{-(\nu+1)}\times\right. \tag{2.46}$$
$$\left.\times\left[\frac{R_0(\tau)}{\tau}-\frac{dR_0(\tau)}{d\tau}\right]R_0^{\nu+1}(\tau)d\tau\right\}=\frac{1}{\gamma n M_a^2\theta_a^2}.$$

В уравнениях (2.45) и (2.46) $n=p_a/p_\infty$ — начальное отношение давлений (степень нерасчетности струи)

После подстановки соотношений (2.44) в (2.42) уравнение для определения положения поверхности постоянного давления $R_b(t)$ запишется в виде

$$R_b=R_0+\frac{\varepsilon}{R_0^\nu}\int_1^t\left\{1+\frac{2}{(\gamma-1)M_a^2\theta_a^2}\,\frac{t^{-(\nu+1)(\gamma-1)}}{\left[\frac{R_0(\tau)}{\tau}-\frac{dR_0(\tau)}{d\tau}\right]^2}\right\}\times$$
$$\times\left\{\frac{\tau^{-(\nu+1)}\left[\frac{R_0(\tau)}{\tau}-\frac{dR_0(\tau)}{d\tau}\right]^2}{D(t,\tau)}\right\}^{1/\gamma}\left[\frac{R_0(\tau)}{\tau}-\frac{dR_0(\tau)}{d\tau}\right]R_0^\nu(\tau)d\tau, \tag{2.47}$$

где

$$D(t,\tau)=\frac{p_0(t,\tau)}{\varrho_a W_a^2\theta_a^2}=t^{-(\nu+1)}\left(\frac{R_0}{t}-\frac{dR_0}{dt}\right)^2+$$
$$+\frac{\dfrac{d^2R_0}{dt^2}}{(\nu+1)\,R_0^\nu}\left[\left(\frac{R_0}{t}\right)^{\nu+1}-\left(\frac{R_0(\tau)}{\tau}\right)^{\nu+1}\right]$$

Функции $R_0(t)$ и $R_b(t)$ определяют форму падающего скачка и границы перерасширенной струи соответственно. При этом координаты x, y струи связаны с переменными R, t формулами

$$(x/r_a)\theta_a=t-1,\quad y/r_a=R$$

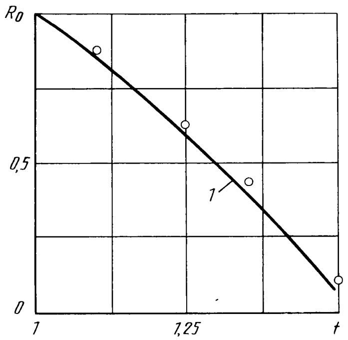
Уравнения (2.46), (2.47) содержат в качестве параметров величины γ, n, M_a и θ_a, причем две последние входят только в виде произведения. Следовательно, в рассматриваемом приближении величина $M_a\theta_a$ является критерием подобия течения, что согласуется с анализом подобия гиперзвуковых перерасширенных струй в подразд. 2.1.3. Из уравнения (2.46) можно получить и другой результат, заключающийся в том, что форма падающего скачка струи определяется, главным образом, параметром $K_0=\frac{2\gamma}{\gamma+1}n\mathrm{M}_a^2\theta_a^2$. Действительно, уравнение (2.46) легко можно привести к виду

$$K_0t^{-(\nu+1)}\left(\frac{R_0}{t}-\frac{dR_0}{dt}\right)^2-\varepsilon nt^{-(\nu+1)\gamma}+\frac{\gamma+1}{2}K_0\times$$
$$\times\left\{\frac{2\gamma}{\gamma+1}\frac{\left[\left(\frac{R_0}{t}\right)^{\nu+1}-1\right]}{(\nu+1)R_0^\nu}+\nu\varepsilon\frac{1}{R_0^{\nu+1}}\int_1^t\tau^{-(\nu+1)}\times\right. \tag{2.48}$$
$$\left.\times\left[\frac{R_0(\tau)}{\tau}-\frac{dR_0(\tau)}{d\tau}\right]R_0^{\nu+1}(\tau)d\tau\right\}\frac{d^2R_0}{dt^2}=1.$$

Влияние γ и степени нерасчетности n на форму ударной волны проявляется через второй член уравнения (2.48), который содержит малый параметр $\varepsilon=(\gamma-1)/(\gamma+1)$. Коэффициенты $(\gamma+1)/2$ и $2\gamma/(\gamma+1)$, через которые учитывается влияние γ в других членах уравнений (2.48), близки к единице.

На рис. 2.30 для случая цилиндрической симметрии ($\nu=1$) показано положение ударной волны, рассчитанное из уравнения (2.48), при $K_0=\mathrm{const}$ и различных значениях γ.

На рис. 2.31 приведены результаты расчетов положений ударной волны и поверхности постоянного давления при различных значениях степени нерасчетности n и $K_0=\mathrm{const}$. Положение ударной волны практически не зависит от степени нерасчетности в рассмотренном диапазоне значений $n\leqslant0{,}7$. При этом приближенное аналитическое решение одномерной нестационарной задачи



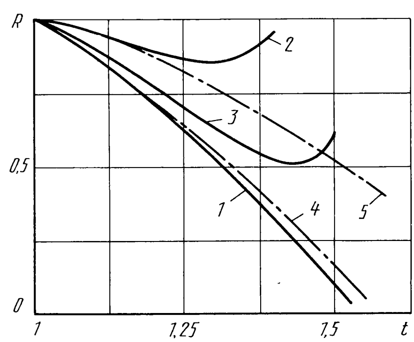


Рис. 2.30. Траектории ударной волны $R_0=R_0(t)$ при $K_0=0{,}209$, $n=0{,}7$ и различных γ:

1 — $\gamma=1{,}4$, 0 — $\gamma=1{,}2$

Рис. 2.31. Геометрическая структура течения при $K_0=0{,}209$, $\gamma=1{,}2$ и различных n:

1 — ударная волна при $n=0$ 0,25 ($\nu=1$); 2 — поверхность постоянного давления при $n=0{,}25$ ($\nu=1$), 3 — поверхность постоянного давления при $n=0$ ($\nu=1$), 4 — ударная волна при $n=0{,}25$ ($\nu=0$), 5 — поверхность постоянного давления при $n=0{,}25$ ($\nu=0$)

вполне удовлетворительно согласуется с результатами численных расчетов осесимметричных перерасширенных струй даже при умеренном сверхзвуковом числе $M_a=3$ струи (см. рис. 2.22).

Положение поверхности постоянного давления (границы струи) при $K_0=\text{const}$ существенно зависит от степени нерасчетности n. Из рис. 2.31 следует, что решение уравнения (2.47) дает быстрое увеличение R_b начиная с некоторого момента времени. В результате этого приближенное аналитическое решение одномерной нестационарной задачи дает правильное описание формы границы осесимметричной перерасширенной струи только в небольшой окрестности среза сопла.

Резкое возрастание R_b в приближенном аналитическом решении связано с тем, что в случае цилиндрической симметрии ($\nu=1$) второй член в уравнении (2.47) неограниченно возрастает при $R_0\to 0$. В этом случае, по-видимому, необходимо удерживать больше членов в разложении (2.31) для R. Отметим, что в случае плоского течения ($\nu=0$) решение уравнения (2.47) дает положение поверхности постоянного давления, согласующееся с физическим характером течения. Результаты расчета R_0 и R_b для плоского случая показаны на рис. 2.31 штрихпунктирной линией.

Рассмотрим теперь применение метода нестационарной аналогии в случае недорасширенной струи. Будем исходить из уравнения количества движения для газа струи в проекции на ось x

$$(p_a+\varrho_a W_a^2)\pi r_a^2+2\pi\int\limits_{r_a}^{y_2} p_2 y_2 dy_2=2\pi\int\limits_0^{y_2}(p+\varrho u^2)y dy, \tag{2.49}$$

преобразовав его аналогично методу, изложенному в работе [35] для случая обтекания тонких тел гиперзвуковым потоком.

Здесь $y_2(x)$ — уравнение границы струи, а $p_2(x)$ — давление на этой границе. Кроме того, принято, что поток на выходе сопла равномерный и параллелен оси x ($\theta_a=0$).

С использованием уравнения сохранения расхода

$$G_a=\varrho_a W_a \pi r_a^2=2\pi\int\limits_0^{y_2}\varrho u y dy \tag{2.50}$$

и интеграла Бернулли

$$H_a=e_a+p_a/\varrho_a+W_a^2/2=e+p/\varrho+u^2/2+v^2/2 \tag{2.51}$$

уравнение (2.49) приводится к виду

$$2\pi\int\limits_0^{y_2}\varrho(e+v^2/2)y dy+2\pi\int\limits_{r_a}^{y_2}p_2 y_2 dy_2= \tag{2.52}$$

$$=\varrho_a e_a \pi r_a^2+2\pi\int\limits_0^{y_2}\varrho\left[\frac{(u-W_a)^2}{2}-h_a\frac{(u-W_a)}{W_a}\right]y dy.$$

Оценка показывает, что второй член в правой части уравнения (2.52) составляет величину порядка — $G_a e_a(1/W_a - 1/U)$, т. е. является малым. Тогда уравнение

$$2\pi\int\limits_0^{y_2}\varrho\left(e+\frac{v^2}{2}\right)y\,dy+2\pi\int\limits_{r_a}^{y_2}p_2y_2\,dy_2=\varrho_a e_a r_a^2-G_a e_a\frac{U-W_a}{UW_a}\qquad(2.53)$$

допускает следующую интерпретацию в рамках метода нестационарной аналогии. Тепловая энергия цилиндрического слоя газа единичной длины — $\varrho_a e_a \pi r_a^2$ расходуется на кинетическую энергию разлета этого слоя в поперечном направлении со скоростью v и совершение работы $2\pi\int\limits_{r_a}^{y_2}p_2y_2\,dy_2$ против сил давления. Расширившийся слой газа сохраняет также тепловую энергию в количестве $2\pi\int\limits_0^{y_2}\varrho e y\,dy$.

Упростим далее уравнение (2.53) путем использования моделей бесконечно тонкого слоя и плоских сечений [35]. В соответствии с первой моделью будем считать, что весь газ содержится вблизи границы $y_2(x)$ и имеет тепловую энергию e_2 и поперечную составляющую скорости v_2. В соответствии со второй моделью будем считать, что, кроме расширения в поперечном направлении, данный слой газа как целое движется в направлении x с постоянной характерной скоростью U

$$(W_a<U<W_{\max}).$$

В соответствии с указанными моделями примем в уравнении (2.53) для e и v следующие величины

$$e=e_2;\ v=v_2=U\,dy_2/dx,$$

после этого указанное уравнение примет вид

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dy_2}{dx}\right)^2+\frac{2\pi p_\infty}{G_aU}\int\limits_{r_a}^{y_2}y\,dy=(e_a-e_2)/U^2.\qquad(2.54)$$

Для e_2 примем следующую оценку, соответствующую изоэнтропийному характеру расширения газа, протекающего вблизи границы $y_2(x)$:

$$\frac{e_2}{e_a}=\frac{T_2}{T_a}=\left(\frac{p_2}{p_\infty}\right)^{(\gamma_a-1)/\gamma_a}=\left(\frac{p_\infty}{p_a}\right)^{(\gamma_a-1)/\gamma_a}=n^{(1-\gamma_a)/\gamma_a}.$$

Параметр $n^{\frac{1-\gamma_a}{\gamma_a}}$ учитывает отклонение от автомодельности параметров течения по $\sqrt{n}$.

Поскольку согласно уравнению (2.54) на поперечное движение расходуется энергия e_a, то в соответствии с этим можно определить характерную скорость U с помощью соотношения

$$U^2/2=H_a-e_a,$$

которое приводит к выражению

$$U = W_a\{1+2/(\gamma_a \mathrm{M}_a^2)\}^{1/2}, \tag{2.55}$$

соответствующему другому определению U: как отношению импульса $J_a=(p_a+\varrho_a W_a^2)\pi r_a^2$ на выходе сопла к величине расхода $G_a=\varrho_a W_a \pi r_a^2$ через него.

Введем характерный угол течения $\vartheta = V/U$, используя для характерной продольной скорости U выражение (2.55):

$$\vartheta = \frac{\sqrt{e_a}}{U} = \left[\frac{1}{\gamma_a(\gamma_a-1)}\right]^{1/2} \mathrm{M}_a^{-1}\left(1+\frac{2}{\gamma_a \mathrm{M}_a^2}\right)^{-1/2}. \tag{2.56}$$

При $\mathrm{M}_a \gg 1$ это выражение совпадает с соотношением (2.11), в котором принято $U=W_a$.

Введем обозначения

$$\omega_0^2 = 2\pi p_\infty/(G_a U); \ \chi = 1 - n^{(1-\gamma_a)/\gamma_a} \tag{2.57}$$

и

$$\theta = \vartheta \chi^{1/2}. \tag{2.58}$$

Уравнение (2.54) приобретает вид

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dy_2}{dx}\right)^2 + \frac{\omega_0^2}{2}(y_2^2 - r_a^2) = \theta^2, \tag{2.59}$$

а после его дифференцирования по x приходим к уравнению второго порядка

$$d^2 y_2/dx^2 + \omega_0^2 y_2 = 0, \tag{2.60}$$

которое указывает на осцилляционный характер функции $y_2(x)$ и, таким образом, качественно согласуется с наблюдаемой в экспериментах периодической структурой неизобарических струй. Можно отметить, что уравнение (2.60) может быть при тех же предположениях получено из интегрального уравнения количества движения в проекции на ось y.

Решение уравнения имеет вид

$$y_2 = Y \sin(\omega_0 x + \varphi), \tag{2.61}$$

где Y, ω_0 и φ — амплитуда, частота и фаза колебаний. При этом по физическому смыслу задачи $y_2 \geqslant 0$.

Рассмотрим начальный участок, соответствующий первой полуволне решения уравнения (2.61). Амплитуда колебаний Y (максимальный радиус границы струи) определяется из уравнения (2.59), если учесть, что $dy_2/dx=0$ при $y=Y$

$$Y^2 - r_a^2 = 2\theta^2/\omega_0^2 = \theta^2 G_a U/\pi p_\infty. \tag{2.62}$$

Фаза колебаний φ находится из начального условия $y_2(0)=r_a$, что дает $\varphi = \arcsin(r_a/Y)$, а для расстояния X от среза сопла до сечения, где $y_2=Y$, очевидно, имеем:

$$X = \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{r_a}{Y}\right)\right] \Big/ \omega_0. \tag{2.63}$$

Чтобы не загромождать конечные формулы, рассмотрим случай очень больших степеней нерасчетности истечения n, при котором $1/n \to 0$, $r_a/Y \to 0$, $\varphi \to 0$ и структура начального участка становится автомодельной. Случай произвольных значений n ($n>1$) может быть легко воспроизведен соответствующими выкладками.

При $n \to \infty$, $r_a/Y \to 0$, $\varphi \to 0$ решение (2.61) принимает вид

$$y_2 = Y \sin \omega_0 x.$$

Расстояние X до максимального сечения начального участка равно

$$X = \frac{\pi}{2\omega_0} = 1{,}11 \left\{ \frac{G_a U}{\pi p_\infty} \right\}^{1/2}. \qquad (2.64)$$

Входящий в соотношения (2.62) и (2.64) комплекс $L^2 = G_a U/(\pi p_\infty)$ выражается через параметры n, M_a, γ_a следующим образом

$$L^2 = \frac{G_a U}{\pi p_\infty} = n \gamma_a M_a^2 r_a^2 \left(1 + \frac{2}{\gamma_a M_a^2} \right)^{1/2}. \qquad (2.65)$$

Таким образом, с учетом равенств (2.62) и (2.64) имеем для характерных продольного X и поперечного Y размеров границы струи

$$\frac{X}{\sqrt{n} \cdot r_a} = 1{,}11 \sqrt{\gamma_a} \cdot M_a \left(1 + \frac{2}{\gamma_a M_a^2} \right)^{1/4}; \qquad (2.66)$$

$$\frac{Y^2}{r_a^2} - 1 = \frac{n}{\gamma_a - 1} \left(1 + \frac{2}{\gamma_a M_a^2} \right)^{-1/2} \left(1 - n^{\frac{1-\gamma_a}{\gamma_a}} \right). \qquad (2.67)$$

Эти зависимости представлены на рис. 2.32 сплошными линиями совместно с данными численных расчетов (точки) [52]. Имеется достаточно удовлетворительное соответствие.

Для описания формы и размеров границы начального участка сильно недорасширенной струи можно применить, на первый взгляд, более грубый подход, который, однако, по адекватности получающихся конечных результатов оказывается даже более эффективным.

Рассматриваем слой газа между плоскими сечениями x и $x + dx$ (см. рис. 1.8), вытекший из сопла за время dt и движущийся вдоль оси струи со скоростью $U = x/t = dx/dt = \text{const}$. В этом слое, ограниченном поверхностью раздела y_2, содержится масса газа $G_a dt$, а средняя плотность ρ может быть оценена соотношением

$$\rho = \frac{G_a dt}{\pi y_2^2 dx} = \frac{G_a}{\pi y_2^2 U}.$$

В системе координат, движущейся в направлении оси x со скоростью U, с точки зрения метода нестационарной аналогии,

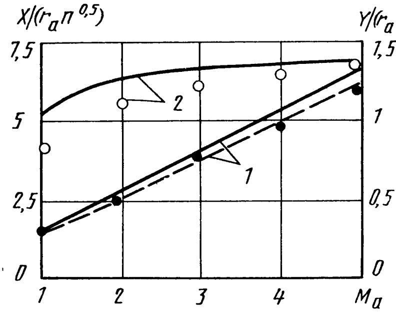


Рис. 2.32 Характерные продольные размеры X и Y затопленной струи при $\gamma_a=1{,}4$ $n=10^2$ и различных M_a:

точки — численный расчет [25, 52], сплошные кривые — формулы (2.66) и (2.67), пунктир — формула (2.69), 1 — $X/(\sqrt{n}\cdot r_a)$, 2 — $Y/(\sqrt{n}\cdot r_a)$

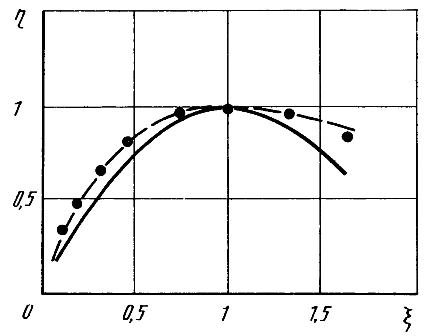


Рис. 2.33. Сравнение приближенных выражений (2.61) и (2.70) для формы границы струи с численным расчетом при $M_a=3{,}1$, $\gamma_a=1{,}4$, $n=100$:

значки — численный расчет [52], сплошная кривая — формула (2.61), пунктир — формула (2.70)

газ в этом слое вследствие первоначального запаса энергии e_a инерционно разлетается в радиальных направлениях с местными скоростями $y/t=Uy/x$ относительно оси x. Радиальная скорость газа относительно движущейся со скоростью $dy_2/dt=Udy_2/dx$ контактной поверхности равна

$$v=U\left(\frac{y_2}{x}-\frac{dy_2}{dx}\right).$$

Записав уравнение количества движения для радиального направления в элементарном виде $\varrho v^2=p_\infty$, получаем простейшее дифференциальное уравнение для определения y_2

$$\frac{y_2}{x}-\frac{dy_2}{dx}=\frac{y_2}{L}. \tag{2.68}$$

Из него с использованием условия $(dy_2/dx)|_X=0$ находим величину X в виде

$$X=L=\left\{\frac{G_aU}{\pi p_\infty}\right\}^{1/2}=r_a\sqrt{\gamma_a n}\cdot M_a\left(1+\frac{2}{\gamma_a M_a^2}\right)^{1/4}, \tag{2.69}$$

которая с точностью до коэффициента 1.11, совпадает с величиной X, вычисленной по формуле (2.64). На рис. 2.32 зависимость (2.69) изображена пунктиром.

Общее решение уравнения (2.68) имеет вид

$$y_2(x)=cx\exp(-x/X)$$

или в переменных $\xi=x/L$, $\eta=y/Y$

$$\eta_2(\xi)=\xi\exp(1-\xi). \tag{2.70}$$

Максимальный радиус Y здесь определяется, как и ранее, из условия (2.62) и, следовательно, описывается формулой (2.67).

На рис. 2.33 представлено сравнение формы границы струи, получаемой численными расчетами [52], по формуле (2.61) и по формуле (2.70). Сравнение показывает, что в области первой бочки выражение (2.70), полученное с помощью последнего подхода, лучше соответствует численным расчетам, чем выражение (2.61). Такое же заключение следует и из рис. 2.32 при сравнении результатов для характерного продольного размера X.

Как будет показано в разд. 3, последний рассматриваемый метод благодаря чрезвычайной простоте позволяет получить аналогичные конечные результаты и для более сложного по своей природе истечения струи в спутный сверхзвуковой поток. При этом результаты оказываются также удовлетворительно соответствующими результатам точных численных расчетов.

Колебательный характер решения уравнения (2.61) указывает на многобочечную структуру неизобарической струи [22]. При рассмотрении следующих после первого колебательных циклов для реального течения необходимо учитывать вязкое перемешивание. Тем не менее можно отметить, что при использовании модели идеального газа анализ [22] приводит к результату, согласно которому поперечные размеры последующих циклов должны постепенно уменьшаться при удалении от среза сопла. Причиной, вызывающей такое уменьшение, является уменьшение полной энергии e_a на входе в каждый последующий цикл из-за диссипации кинетической энергии поперечного движения в скачках уплотнения.

Фигурирующий в выражениях (2.64), (2.69) для продольного размера X начального участка комплекс $L=[G_aU/(\pi p_\infty)]^{1/2}$, построенный на отношении величины G_aU, близкой к импульсу J_a газа на срезе сопла, к давлению p_∞, является естественным продольным масштабом течения в неизобарической струе. В случае перерасширенной струи продольные размеры линейно зависят от комплекса $[J_a/\pi p_\infty)]^{1/2}$ (см. подразд. 2.1.1). Для рассматриваемого здесь случая истечения в затопленное пространство согласно выражению (2.69) имеем просто $X=L$. При этом в разд. 3 будет показано, что в случае истечения в спутный сверхзвуковой поток конкретные продольные размеры недорасширенной струи также оказываются пропорциональными масштабу L.

Следует отметить, что, кроме выражения комплекса L через параметры на срезе сопла в виде $L=r_a\sqrt{\gamma_a n}\cdot \mathrm{M}_a[1+2/(\gamma_a \mathrm{M}_a^2)]^{1/4}$, оказывается также удобным выражать его через радиус критического сечения сопла r_* и отношения $N_0=p_0/p_\infty$ или $N_*=p_*/p_\infty$ давления в критическом сечении p_* и в форкамере сопла p_0 к давлению p_∞ в окружающей среде. Действительно, выразив расход G_a через параметры в критическом сечении $G_a=\rho_* a_* \pi r_*^2$, находим

$$L=r_*\{N_*\gamma_a U/a_*\}^{1/2}.$$

Если $n \gg 1$, то величина характерной продольной скорости в струе близка к максимальной скорости истечения $W_{\max}$. В этом случае получаем выражение

$$\frac{L}{r_* \sqrt{N_*}} = \left\{ \gamma_a \frac{\gamma_a+1}{\gamma_a-1} \right\}^{1/2}. \qquad (2.71)$$

Если здесь от $N_* = p_*/p_\infty$ перейти к $N = p_0/p_\infty$ по соотношению

$$N_* = \left(\frac{2}{\gamma_a+1} \right)^{\frac{\gamma_a}{\gamma_a-1}} N,$$

в котором множитель $[2/(\gamma_a+1)]^{\frac{\gamma_a}{\gamma_a-1}}$ — сравнительно слабая функция показателя адиабаты γ_a, а от r_* перейти к диаметру $d_* = 2r_*$, то с точностью до 20% в диапазоне изменения γ_a от 1,25 до 1,67 получаем простейшую для запоминания формулу

$$L \approx d_* \sqrt{N}.$$

Для $\gamma_a = 1{,}4$ при этом $L = 1{,}05 d_* \sqrt{N}$.

Можно видеть, что при использовании параметров N_* и N число M_a на срезе сопла вообще выпадает из критериев, определяющих характерные продольные размеры затопленной струи. Наоборот, характерный поперечный размер $Y = \theta_0 L \sim \sqrt{e_a}$, определяемый запасом внутренней энергии газа e_a на срезе сопла, существенно зависит от числа M_a. В связи с этим простейшее выражение для Y в виде $Y = r_a \{ n/(\gamma_a - 1) \}^{1/2}$ получается именно при использовании в качестве определяющего параметра степени нерасчетности n, а не параметров N_* или N.

Всюду ранее полагалось, что поток газа на срезе сопла параллелен оси сопла ($\theta_a = 0$), так что продольная компонента скорости газа W_a равна полной скорости $\vec{W}_a$ и вместе с числом M_a постоянна по всему выходному сечению сопла. Все результаты, полученные здесь, можно обобщить и на случай конического сверхзвукового сопла, в котором реализуется течение от источника, если угол θ_a не слишком велик.

В этом случае уравнение количества движения в проекции на ось x (уравнение 2.49) сохраняет свой вид, а уравнение сохранения расхода записывается следующим образом

$$G_a = \frac{\varrho_a W_a \pi r_a^2}{\cos^2 \theta_a / 2} = 2\pi \int_0^{y_a} \varrho u y \, dy. \qquad (2.72)$$

В уравнениях (2.49), (2.72) индексом «a» обозначаются параметры на кромке выходного сечения сопла.

В результате преобразований, аналогичных проведенным при $\theta_a = 0$, уравнение (2.49) можно преобразовать к виду

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dy_2}{dx} \right)^2 + \frac{2\pi p_\infty}{G_a U} \int_{r_a}^{y_2} y \, dy = \frac{e_a - e_2}{U^2} + \sin^2 \frac{\theta_a}{2} \frac{\frac{U^2}{2} + \frac{W_a^2}{2}}{U W_a}. \qquad (2.73)$$

Нетрудно показать, что усредненная по выходному сечению сопла начальная кинетическая энергия поперечного движения $<\frac{v_a^2}{2}>\approx W_a^2 \sin^2\frac{\theta_a}{2}$. Поэтому, приняв $W_a \approx U$, уравнение (2.73) можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dy_2}{dx}\right)^2+\frac{2\pi p_\infty}{G_a U}\int_{r_a}^{y_2} y\,dy=\frac{e_a+\langle v_a^2/2\rangle-e_2}{U^2}.$$

Это уравнение показывает, что при $\theta_a \neq 0$ на разлет газа в поперечном направлении расходуется наряду с начальной тепловой энергией e_a и начальная кинетическая энергия поперечного движения $<v_a^2/2>$.

Для U сохраняется выражение (2.55), но вместо W_a нужно подставить среднюю по выходному сечению сопла продольную скорость $<u_a>$, а число M_a заменить на $<M_a>=<u_a>/a_a$. Оценки показывают, что $<u_a>\approx W_a(1-\theta_a^2/4)$. Поэтому при $\theta_a \leqslant 20$ поправки для U несущественны. Тогда согласно соотношению (2.66) или (2.69) влиянием θ_a на X можно пренебречь.

Для Y вместо выражения (2.67) получим соотношение

$$\frac{Y}{r_a^2}-1=\frac{n}{\gamma_a-1}\left(1+\frac{2}{\gamma_a M_a}\right)^{-1/2}\left[1-n^{\frac{1-\gamma_a}{\gamma_a}}+\frac{\gamma_a(\gamma_a-1)}{4}(M_a\theta_a)^2\right].$$

Этот результат согласуется с данными подразд. 2.1.3.

Метод нестационарной аналогии позволяет также получить приближенные выражения для формы висячего скачка $y_1(x)$ и распределения давления между висячим скачком и границей струи $y_2(x)$. С этой целью рассмотрим уравнение нестационарного радиального движения газа в плоском слое единичной ширины в начальном участке струи

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}.$$

В переменных Лагранжа t, m, для которых

$$dm=2\pi\varrho y\,dy;\quad \frac{\partial m}{\partial y}=2\pi\varrho y;$$

$$\frac{\partial m}{\partial t}+v\frac{\partial m}{\partial y}=0,$$

уравнение количества движения имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-2\pi y\frac{\partial p}{\partial m}.$$

Если в качестве первого приближения принять, что величина $\partial v/\partial t$ постоянна в пределах сжатого слоя $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$ и равна $\partial v/\partial t=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y_2}{\partial t}\right)=\partial^2 y_2/\partial t^2$, а для y в приближении, отвечающем концепции тонкого сжатого слоя, принять $y=y_2$, то получим уравнение

$$dp=-\frac{1}{2\pi y_2}\frac{d^2 y_2}{dt^2}dm,$$

которое после интегрирования в пределах сжатого слоя дает следующее соотношение

$$p_\infty - p_1 = -\frac{1}{2\pi y_2}\frac{d^2y_2}{dt^2}(\mathfrak{m} - m_1),$$

где p_1 — давление за висячим скачком; $\mathfrak{m} = G_a/U_0$ — полная масса газа в рассматриваемом слое; m_1 — масса газа, не прошедшего через скачок уплотнения y_1 (т. е. масса газа в слое $0 \leqslant y \leqslant y_1$).

Величина m_1 может быть определена интегрированием в пределах $0 \leqslant y \leqslant y_1$ выражения для распределения плотности $\rho(x, y)$. После преобразования получаем

$$p_1 = p_\infty + \frac{\varrho_a r_a^2}{2y_2}\frac{d^2y_2}{dt^2}(1 - z_1^2)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}, \tag{2.74}$$

где

$$z_1 = \frac{\gamma-1}{2a_a}\frac{y_1}{t}.$$

С другой стороны, можно записать выражение для давления p_1 за висячим скачком через плотность ρ_{11} и скорость v_{11} перед скачком. В приближении сильных ударных волн

$$p_1 = \frac{2}{\gamma+1}\varrho_{11}(v_{11} - dy_1/dt)^2.$$

Подставляя сюда значение плотности ρ_{11} согласно выражению (1.57) и беоя для v_{11} приближенное значение, отвечающее инерциальному разлету газа $v_{11} = y_1/t$, находим

$$p_1 = \frac{\gamma-1}{2}\frac{\varrho_a r_a^2}{a_a^2 t^2}(1 - z_1^2)^{\frac{2}{\gamma-1}}\left(\frac{y_1}{t} - \frac{dy_1}{dt}\right)^2.$$

Приравняв правые части последнего выражения и выражения (2.74), получаем уравнение для $y_1(t)$. Оценки показывают, что для условий течения в плоском слое на достаточном удалении от сопла ($x \gg r_a$) величиной z_1^2 можно пренебречь по сравнению с единицей. При этом получаем уравнение в следующем виде

$$\frac{nr_a^2}{2c_vT_a(a_at)^2}\left(\frac{y_1}{t} - \frac{dy_1}{dt}\right)^2 = 1 + \frac{\gamma n r_a^2}{2a_a^2 y_2}\frac{d^2y_2}{dt^2}.$$

Перейдем от переменной t к переменной $x = Ut$ и далее от x и y к безразмерным $\xi = x/X$, $\eta = y/Y$. Будем иметь

$$\frac{1}{2\gamma}\frac{U}{W_a}\frac{1}{\xi^2}\left(\frac{\eta_1}{c\xi} - \frac{dy_1}{d\xi}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2}\frac{U}{W_a}\frac{1}{\eta_2}\frac{d^2\eta_2}{d\xi^2}, \tag{2.75}$$

где в качестве η_2 нужно подставить уравнение границы струи (2.70). Чтобы учесть условие $y_2 = r_a$ при $x = 0$, выражение (2.75) возьмем в следующем виде

$$\eta_2 = \frac{r_a}{Y} + \left(1 - \frac{r_a}{Y}\right)\xi e^{1-\xi}.$$

Правая часть уравнения, выражающая отношение давления за скачком $p_1(\xi)$ к давлению в затопленном пространстве, при этом примет вид

$$\frac{p_1(\xi)}{p_\infty} = 1 - \frac{1}{2}\frac{U}{W_a}\frac{(2-\xi)e^{1-\xi}}{\frac{r_a}{Y - r_a} + \xi e^{1-\xi}}.$$

В окрестности $\xi=1$ эта функция меняется слабо. Согласно численным расчетам [52] для очень широкого диапазона параметров давление $p_1(x)$ за висячим скачком в пределах от среза сопла до диска Маха меняется всего на 30 ... 40%. Поэтому для дальнейшего упрощения положим $p_1(\xi)=\text{const}$ и примем для него значение, получающееся из последнего выражения при $\xi=1$, т. е.

$$\frac{p_1(\xi)}{p_\infty}=1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{r_a}{Y}\right).$$

Решение уравнения (2.75) при этом имеет следующий элементарный вид

$$\eta_1=c\xi-\sqrt{2\gamma}\frac{W_a}{U}\xi^2\left[1-\frac{1}{2}\frac{U}{W_a}\left(1-\frac{r_a}{Y}\right)\right]^{1/2}.$$

Постоянную c определим из сравнения с численными расчетами [52]. Для этого используем свойства точки максимума ξ_{1m}, η_{1m} функции $\eta_1=c\xi-b\xi^2$. В точке максимума должны выполняться условия

$$c=2b\xi_{1m};\quad c^2=4b\eta_{1m},$$

из которых следует

$$c=2\eta_{1m}/\xi_{1m}.$$

Из численных расчетов следует, что имеет место:

$$\eta_{1m}=Y_1/Y\approx\xi_{1m}=X_1/X.$$

Таким образом, принимая $\xi_{1m}=\eta_m$, находим $c=2$.

Интересно отметить, что при разложении функции $\eta_2=\xi e^{1-\xi}$ в точке $\xi=1$ $\eta_2=2\xi-\xi^2$ имеет коэффициент 2 в первом слагаемом. Это соответствие не является случайным, поскольку полученное для η_1 приближенное решение по своей сути является также разложением истинной функции $\eta_1(\xi)$ в окрестности $\xi=1$.

Сравнение эксперимента с численными расчетами показывает, что уравнение висячего скачка в виде

$$\eta_1=2\xi-\sqrt{2\gamma}\frac{W_a}{U}\xi^2\left[1-\frac{1}{2}\frac{U}{W_a}\left(1-\frac{r_a}{Y}\right)\right]^{1/2} \tag{2.76}$$

вполне удовлетворительно как качественно, так и количественно (в пределах 10 ... 15%) описывает точное решение (рис. 2.34). В частности, из него следует, что толщина сжатого слоя $\Delta=y_2-y_1$ между висячим скачком и границей струи уменьшается с уменьшением γ

$$\left.\frac{\Delta}{Y}\right|_{\xi=1}=\sqrt{\gamma}\frac{W_a}{U}\left[2-\frac{U}{W_a}\left(1-\frac{r_a}{Y}\right)\right]^{1/2}-1.$$

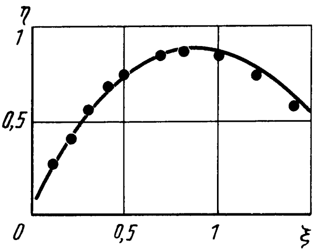


Рис. 2.34. Сравнение приближенного выражения (2.81) для формы висячего скачка с численным расчетом при $M_a=3{,}1$, $\gamma_a=1{,}4$, $n=100$:
● — численный расчет [52], —— — формула (2.76)

Закон распределения давления в сжатом слое можно приближенно задать в линейной форме

$$\frac{p(y)}{p_\infty}=\frac{p_1}{p_\infty}+\left(1-\frac{p_1}{p_\infty}\right)\frac{y-y_1}{\Delta},$$

что будет вполне приемлемым для не слишком высоких значений степени нерасчетности ($n<10^4$).

2.1.5. Сравнение с экспериментальными данными

Модель невязкой струи является приближением к реальному течению на начальном участке неизобарической струи, так как не учитывает образование вблизи границы струи вязкого слоя смешения. Сравнение результатов расчета в приближении невязкого газа с имеющимися экспериментальными данными позволяет выявить возможности этой модели.

На рис. 2.35 сравниваются зависимости от нерасчетности диаметра центрального скачка D_S в струе воздуха ($\gamma_a=1{,}4$), истекающей из сопла с $\theta_a=0$ при $M_a=2{,}8$, полученные численным расчетом и из эксперимента Д. А. Мельникова (1962 г.).

Учитывая разброс экспериментальных данных, соответствие можно считать хорошим. Заметное расхождение наблюдается лишь при значениях $n<n_*$, при которых падающий скачок начинает перемещаться внутрь сопла вследствие взаимодействия с турбулентным пограничным слоем на стенке сопла. В этих условиях непосредственное сравнение расчета и эксперимента некорректно из-за изменения параметров течения перед падающим скачком.

На рис. 2.35 показаны также результаты приближенного расчета с использованием гипотезы, согласно которой центральный скачок является прямым по отношению к набегающему потоку в тройной точке. Эта гипотеза существенно завышает D_S и соответственно занижает X_S.

На рис. 2.36 приведена теневая фотография перерасширенной струи, на которой значками нанесены результаты численного расчета. Соответствие между результатами расчета и эксперимента хорошее.

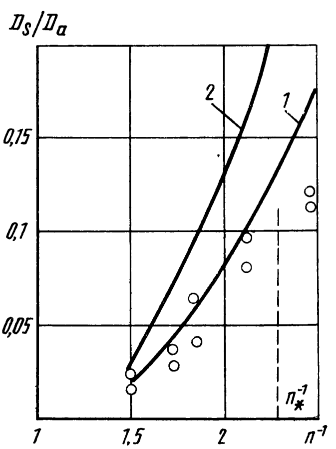


Рис. 2.35. Сравнение расчетных и экспериментальных значений D_S/D_a перерасширенной струи при $M=2{,}8$, $\gamma_a=1{,}4$, $\theta_a=0$:

1 — численный расчет, ○ — эксперимент; *2* — приближенный расчет

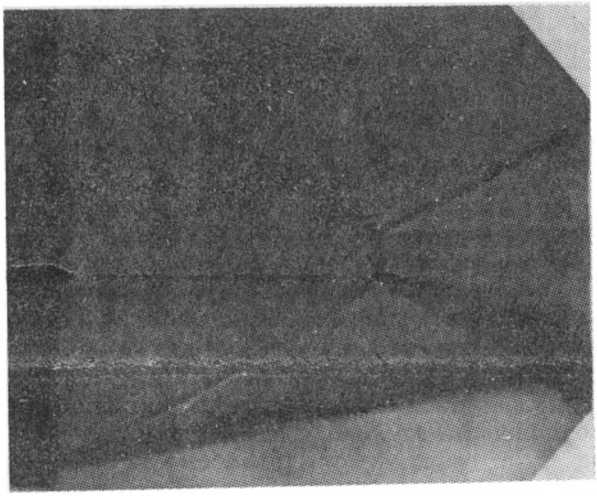


Рис. 2.36. Теневая фотография перерасширенной струи: ○ — расчетные точки

Экспериментальное исследование перерасширенных струй воздуха, истекающих из конических сопел, в диапазоне изменения определяющих параметров $M_a=1,8\dots4,4$; $\theta_a=5\dots30°$ проведено в работе [61]. По теневым фотографиям измерены характерные размеры X_S, X_l, D_S.

Влияние определяющих параметров на размеры перерасширенной струи в численном расчете и эксперименте соответствуют друг другу: линейная зависимость X_S, X_l от комплекса $M_a n^{0,5}$, увеличение продольных размеров в зависимости от θ_a в диапазоне $5\leqslant\theta_a\leqslant15\dots17°$ и в дальнейшем независимость от θ_a.

Приведем формулы для определения характерных размеров начального участка перерасширенной струи, построенные на основании обобщения теоретических и экспериментальных результатов:

$$\frac{X_S}{D_a}=0,8M_a\left(\frac{2\gamma_a}{\gamma_a+1}n\right)^{0,5}+(\mathrm{tg}\,\theta_a)^{0,5}-1,4;$$

$$\frac{X_l}{D_a}=1,6\frac{X_S}{D_a}.$$

Сравнивая результаты численного расчета начального участка перерасширенной струи и эксперимента, можно сказать, что модель невязкого течения правильно определяет волновую структуру течения и, как следствие этого, распределения газодинамических параметров. Последнее, естественно, относится лишь к области течения вне вязкого слоя смешения, образующегося в окрестности границы струи. В приближении невязкого газа на границе струи происходит скачкообразное изменение таких параметров, как плотность, температура, число Маха, а в реальном газе изменение этих параметров является плавным. Размеры слоя смешения можно оценить с помощью методов, разработанных для изобарических струй [14].

Экспериментальное исследование начального участка недорасширенной затопленной струи было проведено многими авторами (см. работы [13, 56]). Сравнение экспериментальных данных с численным расчетом в приближении невязкого газа показывает, что расчет качественно правильно описывает изменение геометрической структуры начального участка недорасширенной струи в зависимости от определяющих параметров: пропорциональность линейных размеров $n^{0,5}$ при больших степенях нерасчетности, пропорциональность продольных размеров числу M_a и слабую зависимость поперечных размеров от M_a при достаточно больших сверхзвуковых числах M_a и т. д. Рассмотрим более подробно количественное соответствие результатов расчета и эксперимента.

На рис. 2.37 сравниваются результаты расчета и эксперимента по расстоянию до центрального скачка, представленному в виде параметра $A_1 = X_S/[D_a M_a(\gamma_a n)^{0,5}]$. Экспериментальные данные работы [56], представленные на рис. 2.37, имеют разброс, в который укладываются и данные других работ. Численный расчет правильно описывает качественный характер зависимости параметра A_1 от M_a: наличие минимума при $M_a=2\ldots2{,}5$, и дает удовлетворительное (в пределах примерно $\pm10\%$) количественное совпадение с экспериментом в исследованном диапазоне $M_a=1\ldots5$.

Модель невязкой струи дает правильную зависимость и от других параметров: незначительное влияние θ_a в диапазоне значений $0\ldots20°$ (см. экспериментальные данные работы [56]), пропорциональность X_S величине $\gamma_a^{0,5}$.

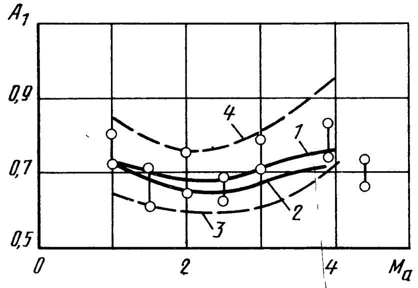


Рис. 2.37. Сравнение расчетных и экспериментальных значений параметра A_1:

— эксперимент; 1 — численный расчет, $n=10$, 2 — численный расчет, $n\geqslant10^2$; 3 — расчет по гипотезе Г И Петрова, 4 — расчет по гипотезе Адамсона и Николлса

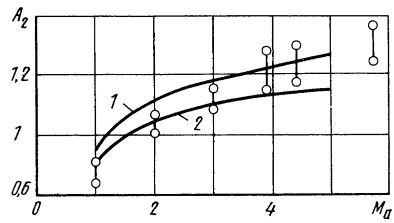


Рис. 2.38. Сравнение расчетных и экспериментальных значений параметра A_2:

— эксперимент, 1 — численный расчет, $n=10$; 2 — численный расчет, $n=10^2$

На рис. 2.38 сравниваются расчетные и экспериментальные [56] значения максимального диаметра висячего скачка, представленные в виде параметра $A_2 = D_{mS}/\left[D_a(n^{0,5}-1)\right]$. Согласно экспериментальным данным этот параметр слабо зависит от n при $n \geqslant 5$. С учетом разброса результатов эксперимента соответствие можно считать удовлетворительным. По условиям экспериментов, увеличение M_a сопровождается уменьшением максимально достижимой степени нерасчетности: при $M_a=1$ $n \leqslant 10^4$, при $M_a=5,7$ $n \leqslant 25$. Этим, по-видимому, объясняется смещение экспериментальных значений при увеличении M_a в сторону расчетной кривой для $n=10$. На результаты эксперимента может влиять конденсация в изоэнтропийном ядре струи. При расширении холодных струй воздуха уже на небольших расстояниях от среза сопла достигается точка росы. Из опытных данных косвенно следует, что конденсация практически не влияет на X_S, но несколько увеличивает D_S.

Сравнение расчета и эксперимента по другим геометрическим размерам выявляет следующее. Численный расчет невязкой струи показывает, что в недорасширенной струе отношение других характерных продольных размеров X_{mS} и X к X_S и отношение D к D_{mS} слабо зависят от определяющих параметров при $n>10$. Это свойство невязкой струи подтверждается экспериментально. В табл. 2.1 сравниваются расчетные и экспериментальные значения относительных размеров начального участка недорасширенной струи. Имеющееся некоторое расхождение связано как с влиянием вязкости, не учитываемой в численном расчете, так и с погрешностями измерения размеров струи по теневым фотографиям. Заметим также, что в вязком газе граница струи, строго говоря, отсутствует. Приведенные экспериментальные значения относятся к границе, видимой на теневых фотографиях, и соот-

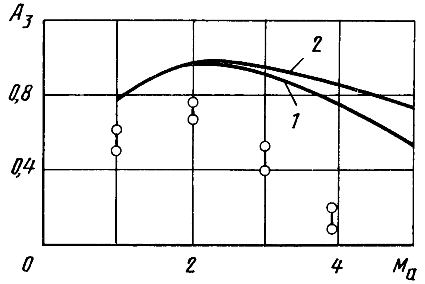


Рис. 2.39. Сравнение расчетных и экспериментальных значений параметра A_3:
— эксперимент; 1 — численный расчет, $n=10$, 2 — численный расчет, $n=10^2$

Таблица 2.1

Величина	Расчет [25]	Эксперимент [56]
$\frac{X_{mS}}{X_S}$	0,62	0,55
$\frac{X}{X_S}$	0,75	0,9
$\frac{X_l}{X_S}$	1,15	1,3
$\frac{D}{D_{mS}}$	$1,1+0,5n^{-0,5}$	$1,38+2,0n^{-1}$

ветствуют области наибольшего градиента плотности в вязком слое смешения.

Особо следует остановиться на сравнении расчетных и экспериментальных значений диаметра центрального скачка. Это сравнение показано на рис. 2.39, где в зависимости от M_a приведены значения параметра $A_3=D_S/[D_a(n^{0,5}-1)]$. Расчет и эксперимент [56] дают одинаковую качественную зависимость от M_a, которая является немонотонной с максимумом при $M_a=$ $=2\ldots2{,}5$. Но количественное различие между расчетом и экспериментом значительно и растет с ростом M_a.

Значительное расхождение по D_S и удовлетворительное соответствие между экспериментом и численным расчетом для других размеров указывает на принципиальное влияние вязкости газа, которое проявляется в изменении формы висячего скачка, главным образом, в области за его максимальным сечением.

2.1.6. Приближенные методы определения положения центрального скачка

Для практических целей часто требуется оценить положение центрального скачка в неизобарической струе. В связи с этим многими авторами разрабатывались приближенные методы определения положения центрального скачка.

Д. Истмен и Л. Радтке (1963 г.) предлагают считать, что положение центрального скачка в недорасширенной струе совпадает с точкой минимума в распределении статического давления за висячим скачком. Дж. Боуером и др. (1970 г.) сделано предположение, что центральный скачок возникает в том сечении, где он по расчету тройной точки оказывается прямым к местному направлению вектора скорости перед висячим скачком. В ряде случаев эти методы дают удовлетворительное совпадение с экспериментальными данными. Но в то же время они не имеют четкого физического смысла, и поэтому нет уверенности в надежности оценок по этим методам в любых случаях. Например, в перерасширенной струе, вытекающей из сопла с равномерным потоком, минимум в распределении статического давления за падающим скачком вообще отсутствует. Гипотеза Дж. Боуера и др. хотя и может быть формально использована в случае перерасширенной струи, но она дает заметное завышение D_S, особенно при небольших n (см. рис. 2.53).

Кроме того, недостаток этих методов состоит в том, что для их использования нужно иметь расчет висячего скачка.

Для практических целей более удобными являются гипотезы о величине статического давления за центральным скачком недорасширенной струи. Т. Адамсон и Дж. Николлс считают, что давление за ним равно давлению в окружающей среде, Г. И. Петров полагает, что окружающему давлению равно давление в критическом сечении одномерного потока за центральным прямым скачком на оси струи. Для определения положения центрального скачка на оси струи по этим гипотезам достаточно знать лишь распределение чисел Маха на оси в изоэнтропийном ядре струи.

На рис. 2.37 приведены результаты расчета по этим гипотезам при достаточно больших степенях нерасчетности, когда имеет место автомодельность по $n^{0,5}$. При небольших степенях нерасчетности ($n\simeq10$) приближенные зависимости могут сместиться в сторону увеличения расстояния до центрального скачка примерно на $10\ldots15\%$.

В диапазоне $1\leqslant M_a\leqslant3$ результаты численного расчета струи и эксперимента лежат между приближенными зависимостями. При $M_a>3$ приближенные методы дают более сильную зависимость расстояния до центрального скачка от числа M_a, а именно $X_S\sim M_a^2$.

2.2. ГАЗОДИНАМИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА НАЧАЛЬНОГО УЧАСТКА НЕИЗОБАРИЧЕСКОЙ ЗАТОПЛЕННОЙ СТРУИ ВЯЗКОГО ГАЗА

2.2.1. О влиянии вязких эффектов на течение в недорасширенной затопленной струе

Ранее анализировались результаты теоретических исследований, основанные на модели идеального газа. Такая модель позволяет получить правильное качественное представление о характере волновой структуры недорасширенной струи, о распределении параметров в зонах, где влияние вязкости является несущественным, а также может быть принята в качестве опорного пункта и для анализа влияния вязких эффектов, обеспечивающего сведениями о геометрической конфигурации течения и о величинах существенных газодинамических параметров.

В реальной струе вдоль границы раздела газов внешнего пространства и истекающей струи нарастает слой смешения, в котором протекают явления вязкого трения, теплопроводности и диффузии. Если толщина δ слоя смешения бесконечно мала, что теоретически может осуществляться при бесконечно больших числах Рейнольдса и ламинарном режиме, то картина течения и распределения параметров в такой струе соответствует модели идеального газа. Также ясно, что при конечной толщине слоя смешения параметры в этом слое должны определяться эффектами вязкого перемешивания и, следовательно, отличаться от соответствующих параметров модели идеального газа. Но только к такому перераспределению газодинамических параметров в слое смешения влияние эффектов, однако, не сводится.

Как показано ранее, при анализе без учета вязкости на некотором удалении от сопла вблизи границы струи оказывается сосредоточенной основная доля всего расхода истекающего газа. Значительная часть этой доли, таким образом, должна вовлекаться в процесс вязкого перемешивания, сопровождающийся диссипацией кинетической энергии в теплоту. В случае затопленной струи в процесс движения могут также вовлекаться большие массы первоначально покоившегося газа затопленного пространства (присоединенная масса) и, наоборот, движение истекающего газа может значительно тормозиться. Снижение скорости и плотности истекающего газа в слое смешения по сравнению с соответствующими величинами в невязком течении требует для прохождения заданного расхода G_a увеличения площади поперечного сечения, через которое этот расход протекает, а также перераспределения параметров в прилежащих к слою смешения зонах невязкого течения. Вследствие этого индуцируется перемещение поверхности постоянного расхода $G=G_a$ в сторону окружающего пространства, а также повышение давления и плотности в сжатом слое за висячим скачком уплотнения и оттеснение последнего к оси. Таким образом, изменение газодинамических параметров происходит и в областях потока, где эффекты вязкости сами по себе являются малыми. Изменяются и размеры этих зон. Возникает явление так называемого *вязкого взаимодействия*, аналогичное по своей природе соответствующему эффекту, наблюдающемуся при обтекании пластины гиперзвуковым потоком [62].

Эффект вязкого взаимодействия связан с характером процессов в слое смешения и поэтому является различным для турбулентного и ламинарного режимов течения в этом слое. Следует отметить, что поскольку профили избыточных скоростей и энтальпий в слое смешения как для турбулентного, так и для ламинарного режимов имеют сходный S-образный вид, то количественное различие проявления вязкого взаимодействия для этих режимов должно быть обусловлено в основном различными темпами нарастания слоя смешения вдоль границы струи.

При переходе к малым числам Рейнольдса наступают режимы течения, при которых проявляются эффекты, связанные с молекулярной дискретностью газа. Явление вязкого взаимодействия осложняется наличием значительных по своей толщине слоев смешения, явлением быстрого утолщения ударных волн и интенсивными диффузионными процессами, происходящими между газами струи и окружающего пространства. Картина течения здесь значительно отличается от континуальной и не может интерпретироваться в терминах слоя смешения и прилегающих к его границам зон с малыми проявлениями эффектов вязкости.

Ниже по течению от начального участка (в переходном участке) проявление вязких эффектов в значительной степени связано с интенсивностью последних в начальном участке. Если в конце начального участка слой смешения нарастает до толщины, сравнимой с характерным поперечным размером струи, то довольно скоро его внутренняя граница достигает оси и вязкие эффекты приводят к быстрому размытию волновой структуры и приближению свойств потока к свойствам, соответствующим изобарической струе. При малых толщинах слоя смешения волновая структура в переходном участке может еще достаточно долго сохраняться. При этом последняя с некоторой степенью точности может быть описана даже в рамках модели идеального газа, как это выполнено в работе [22]. Однако осуществление таких условий можно ожидать для случаев истечения струи из сопла с числами M_a, близкими к единице, и достаточно больших числах Рейнольдса, одновременном сохранении ламинарного режима течения, что является в большинстве практических приложений исключительным. При $M_a \geqslant 3$ и при турбулентном режиме течения, как будет показано далее, в конце начального участка слой смешения нарастает до столь значительных толщин, что течение за начальным участком становится близким к изобарическому.

Имеющиеся в настоящее время данные об исследованиях влияния вязкости на течение в начальном участке затопленной недорасширенной струи являются в основном экспериментальными. Из теоретических работ можно указать только работу [31], в которой авторы представили ряд результатов расчетов по полным уравнениям Навье—Стокса для ламинарного течения. Эти данные качественно согласуются с имеющейся экспериментальной информацией и, несмотря на ограниченность числа рассчитанных вариантов, дополняют последнюю. В частности, они правильно описывают переход к разреженному течению при уменьшении чисел Рейнольдса вплоть до режимов, при которых происходит значительное утолщение ударных волн. В таких режимах уравнения Навье—Стокса перестают давать правильные результаты и здесь необходимо применение кинетических методов описания. Однако применение последних для систематических исследований структуры разреженных струй до настоящего времени не проводилось.

2.2.2. Характерные параметры и толщина слоя смешения. Эффективная длина. Характерное число Рейнольдса

Рассмотрим процесс нарастания слоя смешения вдоль криволинейной границы $y_2(x)$ затопленной струи. Для упрощения аналитической формы записи используем упрощения, возникающие при $n \gg 1$ и $M_a \geqslant 3$. Однако результаты, которые будут получены при этих упрощениях, оказываются для расстояний x от среза сопла, сравнимых с характерным размером X ($\xi = x/X \sim 1$), с хорошей точностью применимыми и для случаев сравнительно умеренных степеней нерасчетности $n \sim 10$ и числа Маха на срезе сопла $M_a = 1$. Такое обстоятельство, как показывает анализ, связано с определяющим характером локальных условий течения и в более слабом влиянии предыстории течения, т. е. условий, имеющих место в прилегающей к соплу зоне вязкого течения. Это обстоятельство и является основным фактором, обусловливающим проявление наблюдаемых в экспериментах [57, 58] автомодельных свойств слоя смешения в большей части начального участка струи. Если бы влияние характеристик течения в присопловой области ($\xi \ll 1$) являлось очень сильным, то при различных условиях, имевших место в области $\xi \ll 1$ и на различных установках (различная геометрия сопл, различные толщины пограничных слоев в сопле и др.), никакой автомодельности нельзя было бы наблюдать. Одной из основных физических причин, объясняющих сравнительно слабое влияние особенностей течения в присопловой области на характеристики слоя смешения при $\xi \sim 1$, является относительная малость расхода газа, протекающего вблизи границы струи при малых ξ. Различные случайные изменения, происходящие в этой области с относительно малыми массами газа, естественно, не могут заметно повлиять на средние параметры значительно больших масс газа, вовлекающихся в процесс вязкого перемешивания на расстояниях $\xi \sim 1$.

С другой стороны, математические упрощения, которые используются далее, состоят в уменьшении вклада в конечные результаты величин, соответствующих малым ξ. Например, далее будем пренебрегать величиной $(dy_2/dx)^2=(Y/X)^2(d\eta/d\xi)^2$ по сравнению с единицей, так что выражение для дифференциала $ds=[1+(dy/dx)^2]^{1/2}dx$ длины дуги вдоль кривой $y_2(x)$ будем заменять просто на dx. При $M_a \geqslant 3$ такое приближение выполняется само по себе, поскольку в этом случае $(Y/X)^2=\theta_0^2<1$ в соответствии с соотношением (2.56). Однако при $M_a=1$ для $\xi \to 0$ $(dy_2/dx)^2 \sim (Y/X)^2 \sim 1$. Пренебрежение же этой величиной в последнем случае оказывается как раз совместимым с указанной ранее физической причиной о малости влияния особенностей течения в присопловой области на параметры слоя смешения при $\xi \sim 1$. По существу к тому же сводится и используемое далее пренебрежение величиной радиуса сопла r_a по сравнению с характерным поперечным размером струи Y, отвечающее предположению $n \gg 1$.

Рассмотрим выражения (1.72) и (1.76) для толщины ламинарного δ_l и турбулентного $\delta_т$ слоя смешения, полученные (см. подразд. 1.3.2) при помощи приближенного интегрального метода в предположении о подобии профилей избыточных скоростей и полных энтальпий. Имеем

$$\frac{\delta_l}{X}=k_l\left(\frac{S_l}{X}\right)\mathrm{Re}_S^{-1/2}; \tag{2.77}$$

$$\frac{\delta_т}{X}=k_т \varkappa S_т/X. \tag{2.78}$$

Здесь S_l и $S_т$ — эффективные длины для ламинарного и турбулентного режимов (см. соотношения (1.73) и (1.77)); Re_S — число Рейнольдса, определенное по эффективной длине S_l и параметрам на линии $\overline{y}(x)$, где значения избыточных скоростей и полных энтальпий равны 0,5,

$$\mathrm{Re}_S=\overline{\varrho}\,\overline{W}S_l/\overline{\mu};$$

$\varkappa$ — эмпирическая константа; k_l и $k_т$ — численные коэффициенты, имеющие различные значения при различных определениях толщины слоя смешения. Для полной толщины $k_l=6{,}1$; $k_т=25$. При определении δ по 5%-ному отклонению профилей избыточных скоростей и полных энтальпий от своих асимптотических значений $k_l=4{,}45$; $k_т=18{,}2$; а при определении по 10%-ному отклонению — $k_l=3{,}8$, $k_т=15{,}5$.

Выражения (2.73) и (2.77) для эффективных длин S_l и $S_т$ могут быть записаны в упрощенной форме, если учесть свойства, отвечающие условиям затопленной струи. В этом случае для скорости и давления на линии $y(x)=y_{0,5}(x)$ имеет место

$$\overline{W}=W_{\max}/2=\mathrm{const};$$

$$\overline{p}\approx p_\infty=\mathrm{const}.$$

Из соотношения (1.26)

$$\overline{T}=\overline{H}/\overline{c_p}=0{,}5(H_a+H_\infty)-W^2_{\max}/8=\mathrm{const}, \qquad (2.79)$$

откуда

$$\overline{\varrho}=\overline{p}/R\overline{T}=\mathrm{const}.$$

Используя также обсуждавшееся ранее упрощение $ds\approx dx$ и пренебрегая в соотношениях (1.73) и (1.77) слагаемыми S^*, находим

$$S_l/X=\left[\int\limits_0^\xi \bar{\eta}^2 d\xi\right]/\bar{\eta}^2 \qquad (2.80)$$

и

$$S_\text{т}/X=\left[\int\limits_0^\xi \overline{\eta} d\xi\right]/\overline{\eta}. \qquad (2.81)$$

В качестве следующего приближения, вполне оправдывающегося при не слишком больших толщинах слоя смешения, примем, что линия $\eta(\xi)$ совпадает с границей струи $\eta_2(\xi)$ в невязком течении. Выполняя интегрирование с использованием для $\eta_2(\xi)$ уравнения (2.70), получаем для диапазона изменения ξ, соответствующего начальному участку ($\xi<2$), следующие выражения

$$S_l/X=(e^{2\xi}-2\xi^2-2\xi-1)/4\xi^2; \qquad (2.82)$$

$$S_\text{т}/X=(e^{\xi}-\xi-1)/\xi, \qquad (2.83)$$

графическое изображение которых представлено на рис. 2.40.

В пределах указанного изменения ξ для упрощения зависимости (2.82) и (2.83) можно заменить следующими аппроксимационными выражениями:

$$S_l/X=(\xi+\xi^{2,5})/3; \qquad (2.84)$$

$$S_\text{т}/X=(2\xi+\xi^2)/4. \qquad (2.85)$$

Введем характерное число Рейнольдса $\overline{\mathrm{Re}}_X$, определенное по средним параметрам $\bar{\varrho}$, $\overline{W}$, $\bar{\mu}$ и расстоянию $X=L$ от среза сопла до максимального сечения струи,

$$\overline{\mathrm{Re}}_X=\overline{\varrho}\,\overline{W}X/\overline{\mu}=\mathrm{Re}_S X/S_l. \qquad (2.86)$$

С использованием этого критерия выражение для толщины ламинарного слоя смешения может быть записано в виде

$$\frac{\delta_l \sqrt{\mathrm{Re}_X}}{X k_l} = \left(\frac{S_l}{X} \right)^{1/2}. \tag{2.87}$$

Зависимость $(S_l/X)^{1/2}$, дающая представление о характере нарастания слоя смешения на начальном участке, представлена кривой 2 на рис. 2.40. Рассмотрение этой зависимости показывает, что в пределах начального участка толщина ламинарного слоя смешения нарастает приблизительно по линейному закону $\delta/X \sim \xi$. При этом скорость нарастания (коэффициент пропорциональности в зависимости $\delta \sim x$) оказывается обратно пропорциональным числу Рейнольдса $\overline{\mathrm{Re}}_X$.

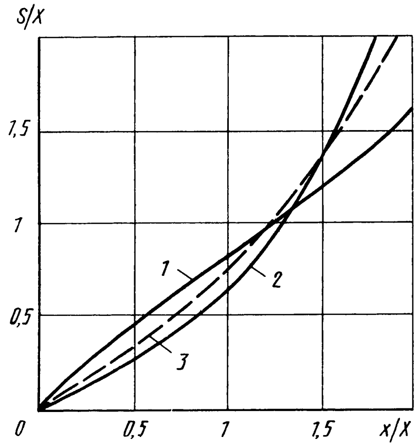


Рис. 2.40. Эффективные длины S_l и $S_т$ вдоль границы недорасширенной струи, истекающей в затопленное пространство:
1 — S_l/X; 2 — $(S_l/X)^{1/2}$, 3 — $S_т/X$

Не слишком сильно отличается от линейной зависимости и закон нарастания вдоль границы струи толщины $\delta_т$ турбулентного слоя смешения $\delta_т \sim S_т$ (см. рис. 2.40).

Укажем связь критерия $\overline{\mathrm{Re}}_X$ с числом Рейнольдса Re_∞, определяемым по параметрам на срезе сопла $\mathrm{Re}_a = \varrho_a u_a r_a/\mu_a$. При этом используем то обстоятельство, что в диапазоне чисел M_a от 1 до 6 и значений показателя γ_a от 1,2 до 1,67 число Re_a с точностью не худшей чем 10% совпадает с числом $\mathrm{Re}_* = \varrho_* a_* r_*/\mu_*$, вычисленным по условиям в критическом сечении. С учетом этого выразим $\overline{\mathrm{Re}}_X$ через параметры в критическом сечении ϱ_*, a_*, r_*, μ_*, а вместо степени нерасчетности будем использовать величины отношения давлений $N_* = p_*/p_\infty$ или $N = p_0/p_\infty$. В предположении $n \gg 1$, при котором скорость газа W_i на внутренней границе слоя смешения близка к максимальной скорости истечения $W_{\max} = \{2H_a\}^{1/2}$, имеем

$$\frac{\bar{W}}{a_*} = \frac{1}{2} \frac{W_{\max}}{a_*} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma_a + 1}{\gamma_a - 1}}; \tag{2.88}$$

$$\bar{h} = \bar{c}_p \bar{T} = (H_a + H_\infty)/2 - \bar{W}^2/2 \approx H_a(1 + 2i_0)/4, \tag{2.89}$$

где $i_0 = H_\infty / H_a$ — энтальпийный фактор. Для изменения коэффициента вязкости с температурой примем степенной закон $\mu \sim T^\omega$. Учитывая еще в соотношении

$$\bar{\mathrm{Re}}_X = \frac{\bar{p}}{p_*} \frac{\bar{W}}{a_*} \left(\frac{T_*}{T} \right)^{\omega+1} \frac{X}{r_a} \mathrm{Re}_* \tag{2.90}$$

примерное равенство $\mathrm{Re}_* \approx \mathrm{Re}_a$, условие $\bar{p}/p_* \approx 1/N_*$ и выражение для X через N_*, получим при $\omega = 1$

$$\bar{\mathrm{Re}}_X = \frac{32\sqrt{\gamma_a}}{(\gamma_a - 1)^{3/4} (\gamma_a + 1)^{5/4}} \left(\frac{\bar{c}_p}{\bar{c}_{pa}} \frac{1}{1+2i_0} \right)^2 \frac{\mathrm{Re}_a}{\sqrt{N_*}}. \tag{2.91}$$

Например, при $\gamma_a = 1{,}4$, $\bar{c_p} = c_{pa}$ имеем

$$\overline{\mathrm{Re}}_X = \frac{25{,}5}{(1+2i_0)^2} \frac{\mathrm{Re}_a}{\sqrt{N_*}}. \tag{2.92}$$

или при использовании параметра $N = p_0/p_\infty$ и при $\gamma_a = 1{,}4$

$$\overline{\mathrm{Re}}_X = \frac{3{,}5}{(1+2i_0)^2} \frac{\mathrm{Re}_a}{\sqrt{N}} \cdot \tag{2.93}$$

Следует отметить, что в ряде работ (см., например, [29, 46]), для обобщения экспериментальных данных применялся критерий $\mathrm{Re}'_*/\sqrt{N}$, представляющий собой отношение числа Рейнольдса, вычисляемого по параметрам в критическом сечении и диаметру этого сечения d_*, к величине $\sqrt{N}$. Для значения энтальпийного фактора $i_0 = 1$, при котором в указанных работах использовался критерий $\mathrm{Re}'_*/\sqrt{N}$, имеет место связь $\bar{\mathrm{Re}}_X \approx 2\mathrm{Re}'_*/\sqrt{N}$ (при $i_0 = 1$), которая в дальнейшем будет использована. Из соотношения (2.91) между Re_X и Re_a следует ряд важных выводов.

1. Влияние подогрева истекающего газа (уменьшение i_0) при сохранении неизменными величин Re_a и N приводит к увеличению числа $\bar{\mathrm{Re}}_X$ и, следовательно, к утоньшению ламинарного слоя смешения. Например, при очень сильном подогреве ($i_0 \to 0$) число $\bar{\mathrm{Re}}_X$ возрастает примерно на порядок по сравнению с его значением при $i_0 = 1$. И наоборот, охлаждение истекающего газа (при $\mathrm{Re}_a = \mathrm{const}$, $N = \mathrm{const}$) или разогрев газа затопленного пространства приводит к уменьшению $\bar{\mathrm{Re}}_X$ и соответствующему увеличению δ_l.

2. Сравнение данных по числу Re_a, используемое обычно в расчетных исследованиях (см., например, работу [31]), на самом деле позволяет сделать лишь частное, применимое к заданным величинам M_a и n, суждение об истинном уровне чисел Рейнольдса в слое смешения. При сравнении результатов, относящихся к одинаковым Re_a, но различным M_a и n, можно при анализе сделать и совсем неверные заключения. Например, уровень критериев $\bar{\mathrm{Re}}_X$, определяющих режим течения, может оказаться в сравниваемых

случаях различным, вплоть до значений, соответствующих переходу от ламинарного режима к разреженному или к турбулентному режиму. Отсюда также следует, что при проведении численных расчетов, задаваясь такими параметрами, как M_a, n, Re_a и используя, например, алгоритм для ламинарного течения, необходимо по оценке критерия $\overline{\mathrm{Re}}_X$ предварительно убедиться в том, что течение в начальном участке будет в самом деле ламинарным.

Определяющая роль критерия $\overline{\mathrm{Re}}_X$ доказывается экспериментальными данными. Проведем сравнение полученных формул (2.77) и (2.78) для определения толщин δ_l и $\delta_т$ слоя смешения с экспериментальными результатами работы для ламинарного [29] и для турбулентного [27] режимов.

На рис. 2.41 представлены данные работы [29], в которой при помощи спектральных измерений свечения газа, возбужденного пучком быстрых электронов, проведено определение концентраций компонентов в струе N_2, истекающего из сопла с числом $M_a=1$ в затопленное пространство, содержащее смесь N_2+CO. Эксперименты проводились при значении энтальпийного фактора $i_0=1$ и при варьировании отношения давлений $N=p_0/p_a$ в диапазоне от $4\cdot10^3$ до $8{,}8\cdot10^4$ и чисел $\overline{\mathrm{Re}}_X$ от 20 до 340 ($10\leqslant\leqslant \mathrm{Re}_*/\sqrt{N}\leqslant157$). На данном рисунке для сечения струи $x/(r_*\sqrt{N})==0{,}8$ ($\xi=x/X=0{,}38$) и числа $\overline{\mathrm{Re}}_X=90$ представлены радиальные распределения суммарной плотности (кривая *1*) и парциальных плотностей истекающего азота (кривая *2*) и газа затопленного пространства (кривая *3*) при трех различных режимах ($\mathrm{Re}_*==2{,}7\cdot10^3$, $N=4\cdot10^3$; $\mathrm{Re}_*=6{,}75\cdot10^3$, $N=2{,}25\cdot10^4$ и $\mathrm{Re}_*=1{,}35\cdot10^4$, $N=8{,}85\cdot10^4$). По оси абсцисс здесь отложена радиальная координата y, отнесенная к комплексу $r_*\sqrt{N}$.

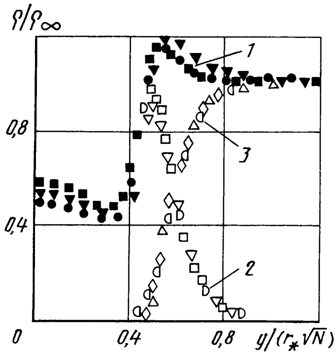


Рис. 2.41. Распределение суммарной и парциальной плотностей N_2 и CO в сечении $x/(r_*\sqrt{n})=0{,}38$ ламинарной струи N_2, истекающей из звукового сопла в затопленное пространство, содержащее смесь N_2+CO ($M_a=1$, $\gamma_a=1{,}4$, $\overline{\mathrm{Re}}_X=90$):

1 — суммарная плотность; *2* — плотность N_2; *3* — плотность газа затопленного пространства; ▲, △, ▽ — $N==88\,500$; ●, ○, D — $N=22\,500$, ■, □, ◇ — $N=4\,000$

Помимо иллюстрации обобщения результатов измерений при одинаковых $\overline{\mathrm{Re}}_X$ и различных Re_* и N данные результаты представляют собой прямые измерения толщины ламинарного слоя смешения и поэтому позволяют сравнить с ними изложенный в этом разделе приближенный метод оценки величины δ_l. Проведем такое сравнение.

В сечении $\xi=0{,}38$ согласно выражению (2.82) для эффективной длины имеем $S_l/X=0{,}15, \{S_l/X\}^{1/2}=0{,}38$. При определении δ_l по 10%-ному отклонению концентраций от своих асимптотических значений вне слоя смешения ($k_l=3{,}6$) в соответствии с формулой (2.77) получаем $\delta/X=0{,}145$ или $\delta/(r_* \sqrt{N})=0{,}3$. Экспериментальное значение $\delta/(r_* \sqrt{N})\approx 0{,}25$, полученное из графика рис. 2.41, вполне удовлетворительно соответствует приближенному расчету.

Рассмотрим случай турбулентного слоя смешения. На рис. 2.42 представлены [27] радиальные распределения $\Delta T=(T_0-T_{0\infty})/(T_{0a}-T_{0\infty})$ и относительного давления p_0'/p_∞, замеренного насадком полного напора в сечении $\xi=0{,}53$ воздушной струи, истекающей из сопла с числом $M_a=3$ при степени нерасчетности $n=51$. Здесь темными кружками даны распределения p_0'/p_∞, а светлыми — ΔT. Характерный продольный размер начального участка для этого режима истечения равен $X/r_a=26{,}5$.

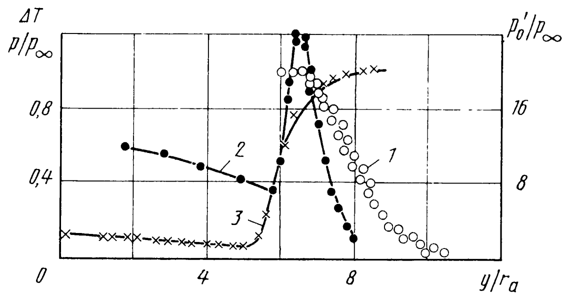


Рис. 2.42. Распределение безразмерных избыточной температуры торможения ΔT давления полного напора p_0'/p_∞ и статического давления в сечении $\xi=x/X=0{,}53$ турбулентной струи, истекающей в затопленное пространство ($M_a=3$; $\gamma_a=1{,}4$; $n=51$):

1 — ΔT_0, *2* — p_0'/p_∞, *3* — p/p_∞

Из выражения (2.83) для $\xi=0{,}53$ имеем $S_т/X=0{,}34$. Тогда при определении $\delta_т$ по значениям безразмерной избыточной температуры ΔT, равным 0,1 и 0,9 ($k_т=15{,}5$), получим по формуле (2.78) $\delta_т/r_a=105\varkappa$. Соответствие с экспериментальной величиной $\delta_т/r_a\approx 2{,}3$, найденной по графику рис. 2.42, получается при значении эмпирической константы $\varkappa$, равной 0,016, что при сделанном при выводе соотношения (1.27) предположении $Pr_т=1$, находится в пределах значений, принимаемых для этой константы [14, 58].

Как указано в работе [27], темп нарастания турбулентного слоя смешения на начальном участке затопленной недорасширенной струи по данным измерений близок к линейному, что также согласуется с проведенным приближенным теоретическим анализом.

2.2.3. Эффект вязкого взаимодействия

Как уже отмечено, ламинарное и турбулентное трение, проявляющееся в слое смешения, приводит к перераспределению параметров и в невязких зонах, примыкающих к слою смешения, и вызывает изменение конфигурации линий тока и скачков уплотнения. Наглядное подтверждение изменения положения висячего скачка уплотнения можно проследить по фотографии струй (рис. 2.43) воздуха при ламинарном режиме течения для двух значений числа $\bar{Re}_X$, равных соответственно 900 и 110. Фотографии получены при визуализации течения методом электронного пучка. Можно видеть, что уменьшение числа $\bar{Re}_X$ приводит к оттеснению висячего скачка к оси струи.

Рис. 2.43. Форма висячего скачка в ламинарной затопленной струе большой степени нерасчетности при различных значениях $\bar{Re}_X$; $M_a=1$; $\gamma_a=1,4$; $i_0=1$: *а* — $\bar{Re}_X=900$, *б* — $\bar{Re}_X=100$

Эффект оттеснения висячего скачка при турбулентном режиме течения иллюстрируется на рис. 2.39, где в сравнении с результатами численных расчетов [3, 52] по модели идеальной жидкости (пунктир) представлены данные (значки) измерений [59] радиуса Y_S центрального скачка уплотнения при различных значениях параметра M_a. Эксперименты показали, что здесь влияния числа $\overline{\mathrm{Re}}_X$ не проявляются. Из рисунка видно, что в результате оттеснения висячего скачка размер Y_S центрального скачка значительно уменьшается по сравнению с его величиной в невязком течении. Оттеснение оказывается тем большим, чем больше число M_a. При $M_a \approx 4$ диск Маха становится столь малым, что на фотографиях не наблюдается.

Эффект оттеснения висячего скачка был подробно исследован для широкого диапазона чисел $\overline{\mathrm{Re}}_X$ и степеней нерасчетности истечения n. В работе [13] представлены результаты измерений для случая истечения из звукового сопла. В дальнейшем теми же авторами диапазон чисел M_a был расширен до $M_a=3$. Во всех этих экспериментах в качестве рабочего газа использовался воздух, а величина энтальпийного фактора равнялась единице. Обработка результатов показала, что все полученные данные могут быть представлены единой зависимостью $(Y_{S0}-Y_S)/X_S=f(\overline{\mathrm{Re}}_X)$, где Y_{S0} и Y_S — радиусы висячего скачка перед диском Маха, рассчитанные по модели невязкого газа и замеренные в опытах; X_S — расстояние до диска Маха, примерно равное для $1 \leqslant M_a \leqslant 3$ величине 1,4 X. Данная зависимость изображена на рис. 2.44

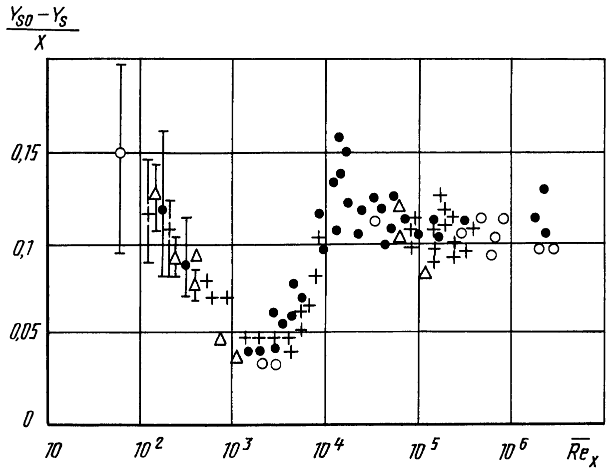


Рис. 2.44. Оттеснение висячего скачка недорасширенной струи при различных режимах течения ($10<n<10^5$, $i_0=1$):
● — $M_a=1$, ○ — $M_a=2$, + — $M_a=2{,}3$, △ — $M_a=3$

Радиус Y_S определялся по фотографиям визуализации и по измеренным распределениям плотности в сечении $x/X_S=0{,}92$, т. е. непосредственно перед диском Маха. В качестве примера на рис. 2.45 представлены данные таких измерений для случая истечения из звукового сопла, имеющего диаметр 3,25 мм, при $N=900$ и различных значениях числа $\overline{\mathrm{Re}}_X$.

Ввиду наблюдающегося при достаточно низких значениях $\overline{\mathrm{Re}}_X$ явления утолщения висячего скачка уплотнения его местоположение для этих случаев представлено на рис. 2.44 вертикальными линиями, изображающими его замеренную условную толщину.

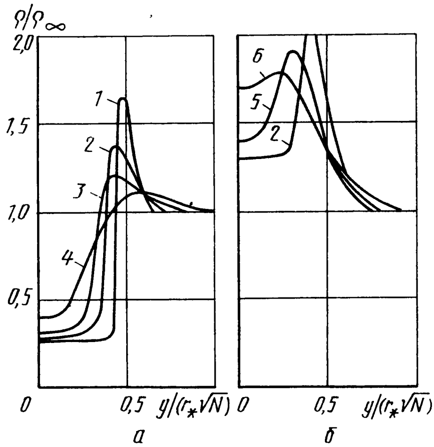


Рис. 2.45 Изменение поперечных распределений плотности в ламинарной недорасширенной струе, истекающей из звукового сопла в затопленное пространство, при изменении числа $\overline{\mathrm{Re}}_X$ ($i_0=1$):

а — сечение $\xi=0{,}57$ *1* — $\overline{\mathrm{Re}}_X=900$, *2* — $\overline{\mathrm{Re}}_X=280$; *3* — $\overline{\mathrm{Re}}_X=150$; *4* — $\overline{\mathrm{Re}}_X=60$; *б* — сечение $\xi=0{,}8$; *5* — $\overline{\mathrm{Re}}_X=170$, *6* — $\overline{\mathrm{Re}}_X=80$

Анализ зависимости величины оттеснения висячего скачка $\delta'/X_S=(Y_{S0}-Y_S)/X_S$, представленной на рис. 2.44, приводит к выводу о существовании режимов течения, классифицируемых по параметру $\overline{\mathrm{Re}}_X$. Действительно, диапазон $\overline{\mathrm{Re}}_X>10^4$, при котором явление вязкого взаимодействия оказывается независящим от числа $\overline{\mathrm{Re}}_X$, следует отнести к турбулентному режиму. Диапазон $10^2\leqslant\overline{\mathrm{Re}}_X\leqslant10^3$, в котором относительная условная толщина оттеснения $\delta'/X_S=(Y_{S0}-Y_S)/X_S$ подчиняется характерной зависимости (см. рис. 2.44)

$$\delta'/X=1{,}35\,/\,\sqrt{\overline{\mathrm{Re}}_X} \tag{2.94}$$

соответствует ламинарному режиму, а диапазон $10^3\leqslant\overline{\mathrm{Re}}_X\leqslant10^4$ — переходному от ламинарного режима к турбулентному. Это заключение было подтверждено специальными опытами [13], в которых с помощью теневого метода и кратковременных ($\sim10^6$ с) искровых подсветок фотографировались картины течения. Было установлено, что при значении числа $\overline{\mathrm{Re}}_X$ от 10^3 до 10^4 в пределах начального участка струи осуществляется турбулизация ламинарного слоя смешения.

Область $\overline{\mathrm{Re}}_X<10^2$, в которой проявляются такие эффекты, как утолщение ударных волн, переход к полностью вязкому течению в сжатом слое и затем диффузия молекул из окружающего пространства в потенциальное ядро струи, представляет спектр разреженных режимов течения.

2.2.4. Физические особенности течения в недорасширенных затопленных струях при различных режимах течения

Турбулентный режим. Этот режим осуществляется при числах Рейнольдса $\overline{\mathrm{Re}}_X > 10^4$. Структура струи и распределения параметров здесь не зависит от числа Рейнольдса. При постоянном значении энтальпийного фактора $i_0 = \mathrm{const}$ в сходственных сечениях $\xi = x/X = \mathrm{const}$ или $x/(r_a\sqrt{n}) = \mathrm{const}$ имеет место подобие (автомодельность) профилей параметров в слое смешения начального участка. Такое свойство иллюстрируется на рис. 2.46, где в

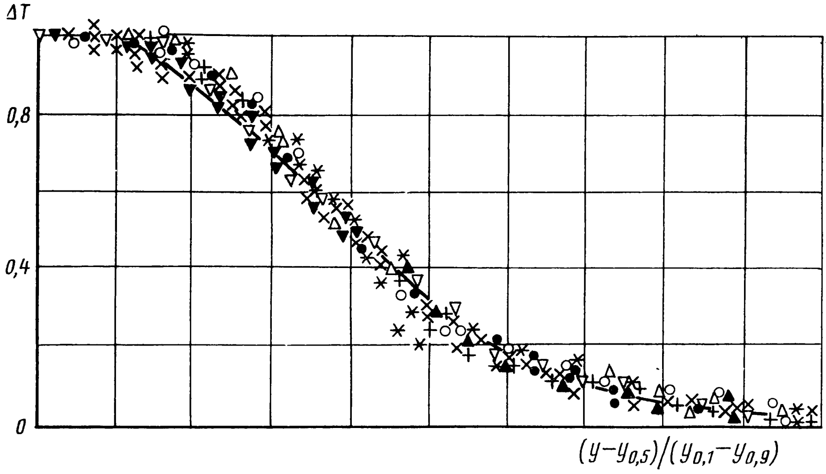


Рис. 2.46 Автомодельность поперечных профилей безразмерной избыточной температуры в турбулентной затопленной струе ($M_a=3$; $\gamma_a=1{,}4$; $7{,}4 \leqslant n \leqslant 51$; $\overline{\mathrm{Re}}_X > 10^6$; $T_0=450$ К; $T_0=T=300$ К):

	*	×	○	+	△	●	▽	▲
n	7,4	7,4	17,4	17,4	34	34	51	51
x/X_S	1,07	1,8	0,56	1,07	0,28	0,56	0,28	0,56

качестве примера представлены поперечные распределения измеренной [56] безразмерной избыточной температуры торможения $\Delta T = (T_0 - T_{0\infty})/(T_{0a} - T_{0\infty})$ для различных сечений и различных режимов истечения из сопла с числом $M_a=3$; $7{,}4 \leqslant n \leqslant 51$; $\overline{\mathrm{Re}}_X > 10^6$; $T_{0a}=450$ К; $T_{0\infty} = T_\infty = 300$ К. В этих опытах была зафиксирована аналогичная автомодельность и для измеряемых профилей отношения полного напора p_0' к давлению в окружающей среде.

В подразд. 2.13 было показано, что расчеты по уравнениям невязкой жидкости также приводят к приближенной автомодельности в распределении параметров в сходственных сечениях струи, когда степень нерасчетности становится достаточно большой ($n \gtrsim 10^3$). Отклонения от автомодельности здесь наблюдаются в узком низкоэнтропийном слое вблизи границы струи. Из представленных результатов следует, что при турбулентном режиме течения автомодельность в распределении параметров наступает при степенях нерасчетности порядка 10.

Толщина $\delta_т$ турбулентного слоя в пределах начального участка нарастает по закону, близкому к линейному, $\delta_т \sim x$. Это значит, что, например, в сечении $x=X$ имеет место $\delta_т \sim X \sim M_a$. Отсюда следует, что при увеличении числа M_a толщина слоя смешения $\delta_т$ в сходственных сечениях турбулентной недорасширенной струи пропорциональна числу M_a. Связанная с $\delta_т$ величина δ', характеризующая эффект оттеснения висячего скачка к оси струи, также имеет в сходственных сечениях зависимость $\delta' \sim M_a$, что следует из рис. 2.44 при $\overline{\mathrm{Re}}_X > 10^4$.

Увеличение M_a, таким образом, приводит к увеличению δ' и уменьшению диска Маха. Согласно данным рис. 2.39, при $M_a \approx 3{,}5$ размер последнего уже становится столь малым, что на фотографиях визуализации не наблюдается. При дальнейшем увеличении M_a точка пересечения висячего скачка на оси начинает смещаться вверх по течению, что должно приводить к изменению характера зависимости расстояния X_S до диска Маха, имевшей место при $M_a < 3{,}5$.

Некоторые измерения авторов работ [56, 59] показали, что интенсивно нарастающий слой смешения достаточно быстро достигает оси струи несколько ниже по течению от сечения $x=X$. Здесь вследствие эффектов перемешивания поперечные градиенты давления быстро выравниваются и течение в струе становится практически изобарическим.

Режимы перехода от ламинарного течения к турбулентному. Эти режимы имеют место в диапазоне $10^3 < \overline{\mathrm{Re}}_X < 10^4$. В этом диапазоне свойство автомодельности по n нарушается. Течение имеет сложный нестационарный характер и в настоящее время еще неизучено.

При этих режимах по фотографиям, полученным теневым методом с применением в качестве источника света конденсированной искры, обеспечивающей время вспышки около 1 мкс, явление перехода течения от ламинарного к турбулентному было непосредственно зафиксировано. При изменении числа $\overline{\mathrm{Re}}_X$ регистрируемая «точка» перехода перемещалась в пределах $0 < x < X_S$, так что при $\overline{\mathrm{Re}}_X = 10^4$ ее местонахождение оказывалось вблизи среза сопла, а при $\overline{\mathrm{Re}}_X = 10^3$ примерно совпадало с сечением $x=X_S$.

Для толщины ламинарного слоя смешения δ_l в сечении $x=X_S$, где при $\overline{\mathrm{Re}}_X = 10^3$ происходил переход, по приведенным соотношениям находим $\delta_l(X_S) \approx 0{,}21X$. Если бы слой смешения в этих условиях был турбулентным, то его толщина, также рассчитанная по этим соотношениям, оказалась бы равной $\delta_т(X_S) \approx 0{,}45X$. Для отношения этих толщин в условиях перехода от ламинарного течения к турбулентному имеет место $\delta_т(X_S)/\delta_l(X_S) \approx 2$. Интересно отметить, что примерно к такой же величине этого отношения приводят некоторые экспериментальные данные для случая истечения в спутный сверхзвуковой поток.

Ламинарный режим. При $10^2 \lesssim \overline{\mathrm{Re}}_X \lesssim 10^3$ осуществляется ламинарный режим течения в слое смешения. Уменьшение числа $\overline{\mathrm{Re}}_X$ приводит к утолщению слоя смешения и монотонному оттеснению висячего скачка в сторону оси струи. При произвольном изменении параметров $\overline{\mathrm{Re}}_X$ и i_0 структура течения не является автомодельной по $\sqrt{n}$. Автомодельность наступает только при фиксированных значениях $\overline{\mathrm{Re}}_X = \mathrm{const}$ и $i_0 = \mathrm{const}$. Этот факт, установленный в работе [13], был подтвержден экспериментальными данными работ [29, 46, 57].

Для проверки автомодельности по $\sqrt{n}$ распределений газодинамических параметров на начальном участке струи в ламинарном режиме течения были проведены серии опытов, в каждой из которых для случая $T_{0a} = T_\infty$, $M_a = 1$ поддерживался постоянным критерий Re_X при изменении в широком диапазоне критерия Re_* и N ($\mathrm{Re}_* > 100$, $N \geqslant 100$). По данным измерений было установлено, что при определенном способе обработки продольные и поперечные поля плотности ϱ и давления полного напора p_0' действительно являются автомодельными по N при фиксированном значении $\overline{\mathrm{Re}}_X$. При обработке выбирались такие координаты, чтобы осевые распределения ϱ и p_0' в изоэнтропийном ядре имели универсальный вид. Согласно выражению для осевого распределения плотности $\varrho/\varrho_a = B(x/r_*)^{-2}$

$$\frac{Nr_*^2}{x^2} = \frac{\varrho}{\varrho_a}\frac{N}{B} = \frac{\varrho}{\varrho_\infty}\left(\frac{\gamma_a+1}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma_a-1}} \frac{\gamma_\infty a_{0a}}{\gamma_\infty a_\infty \ B}. \tag{2.95}$$

Для случая больших чисел M перед насадком полного напора $p_0' = \varrho W_{\max}^2$, откуда с учетом соотношения (2.95)

$$\frac{Nr_*^2}{x^2} = \frac{p_0' N}{\varrho_a W_{\max}^2 B} = \frac{p_0'}{p_\infty}\left(\frac{\gamma_a+1}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma_a-1}} \frac{\gamma_a-1}{2\gamma_a B}.$$

Таким образом, экспериментально измеренные распределения ϱ и p_0', построенные в виде зависимостей величин $\varrho N/(\varrho_a B)$ и $p_0' N/(\varrho_a W_{\max}^2 B)$ от координат $x/(r_*\sqrt{N})$ и $y/(r_*\sqrt{N})$, заведомо обобщаются в гиперзвуковой области. При фиксированных значениях M_a, γ и T_{0a}/T_∞ в целях простоты и наглядности достаточно построить зависимости отношений ϱ/ϱ_∞ и p_0'/p_∞ от тех же координат. На рис. 2.47 представлены результаты измерений продольных осевых распределений плотности и полного напора в струе азота при $\overline{\mathrm{Re}}_X = 280$. Пунктирные кривые отвечают осевым распределениям ϱ и p_0', соответствующим истечению в вакуум невязкого двухатомного газа.

На рис. 2.48 в качестве примера показаны результаты измерения [57] поперечных распределений плотности в струе азота при $\overline{\mathrm{Re}}_X=220$ в трех различных сечениях. Здесь светлые значки соответствуют $N=13500$, $\mathrm{Re}_*=630$, а темные — $N=3040$, $\mathrm{Re}_*==3015$. На рис. 2.49 представлены аналогичные обобщения для отношения p_0'/p_∞. На основании полученных экспериментальных данных можно утверждать, что в случае ламинарного режима течения на начальном участке струи при фиксированных значениях $\overline{\mathrm{Re}}_X$ и i_0 распределения плотности автомодельно по N, если $\overline{\mathrm{Re}}_X \geqslant 100$.

В пределах начального участка, как уже было показано, толщина слоя смешения возрастает примерно линейно с удалением от сопла. При этом угол расширения слоя смешения обратно

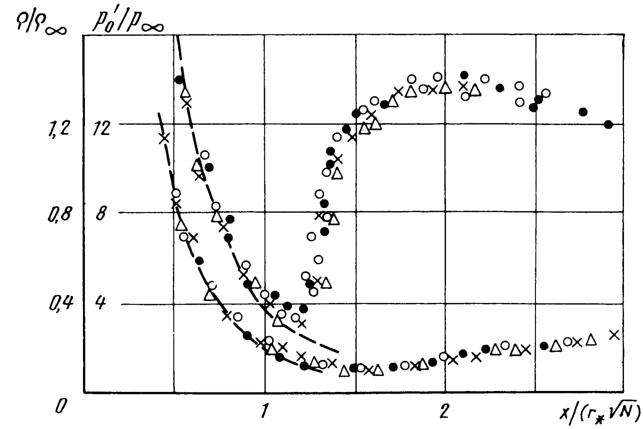


Рис. 2.47 Автомодельность осевых распределений плотности и полного напора в ламинарной затопленной струе ($M_a=1$; $\gamma_a=1{,}4$; $i_0=1$; $100 \leqslant N \leqslant 5\,000$; $730 \leqslant \overline{\mathrm{Re}}_X \leqslant 5150$, $\overline{\mathrm{Re}}_X=280$):

× — $N=5000$; $\mathrm{Re}_*=5150$; △ — $N=900$, $\mathrm{Re}_*=2050$; ● — $N=360$; $\mathrm{Re}_*=1230$; ○ — $N=100$, $\mathrm{Re}_*=730$

пропорционален величине критерия $\overline{\mathrm{Re}}_X$. Такой же зависимости подчиняется и величина δ', характеризующая оттеснение висячего скачка к оси. При $\overline{\mathrm{Re}}_X \approx 10^3$ за исключением достаточно тонкого слоя смешения структура начального участка струи близка к предсказываемой по модели невязкой жидкости.

Переход к разреженному режиму течения. При уменьшении числа $\overline{\mathrm{Re}}_X$ происходит постепенная перестройка течения от ламинарного режима течения к так называемому *режиму рассеяния* [36], при котором структура струи приобретает диффузный характер. Процесс перестройки в начальном участке недорасширенной струи обусловливается значительным оттеснением висячего скачка к оси струи, а также смыканием и после-

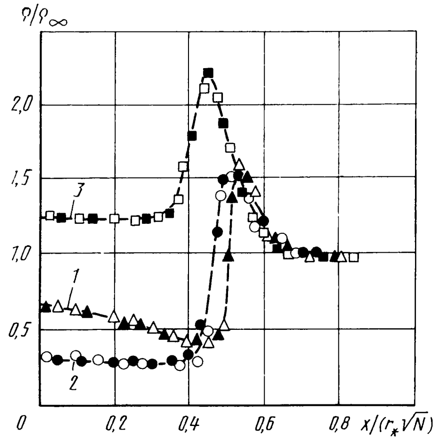


Рис 2.48 Автомодельность поперечных распределений плотности в ламинарной затопленной струе ($M_a=1$); $\overline{\mathrm{Re}}_\chi=220$; $\gamma_a=1{,}4$; $i_0=1$):

светлые значки — $N=13\,500$; темные значки $N=3040$, *1*, △, ▲ — $x/(r_*\sqrt{n})=0{,}76$, *2*, ○, ● — $x/(r_*\sqrt{N})=1{,}1$, *3*, □, ■ — $x/(r_*\sqrt{N})=1{,}5$

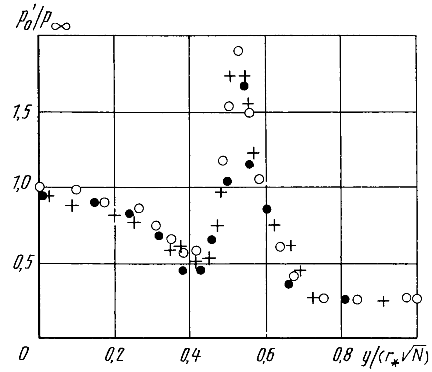


Рис. 2.49 Автомодельность поперечных распределений полного напора в ламинарной затопленной струе ($M_a=$ $=1$; $\gamma_a=1{,}4$; $i_0=1$; $N>10^3$, $\mathrm{Re}_\chi=300$):

● — $N=5000$, + — $N=900$, ○ — $N=360$

дующим размытием утолщающихся зон слоя смешения, висячего скачка и диска Маха.

Достаточно подробно экспериментальные исследования этого процесса проведены в работах [29, 46, 57] для случая истечения из звукового сопла и $i_0=1$. На рис. 2.45 даны измеренные поперечные распределения плотности соответственно в двух сечениях: а) $x/(r_*\sqrt{N})=1{,}2$ ($\zeta={}^x/\chi=0{,}57$) перед диском Маха; б) $x/(r_*\sqrt{N})=$ $=1{,}66$ ($\zeta=0{,}8$) за диском Маха.

На рис. 2.50 показано изменение продольных осевых распределений ϱ (сплошные кривые) и p_0' (пунктирные) при уменьшении Re_χ от 1200 до 20. Каждая из кривых *1*—*4* для плотности получена путем усреднения автомодельных распределений, полученных в нескольких опытах при различных N, но фиксированном $\overline{\mathrm{Re}}_\chi$. При малых значениях $\overline{\mathrm{Re}}_\chi$ в распределении параметров обнаружено нарушение автомодельности по N. Поэтому сплошная кривая *5*, нанесенная на рис. 2.50 для иллюстрации течения при очень низких плотностях, соответствует одному определенному значению $N=5000$.

Вследствие влияния поправок к показаниям насадков полного напора нарушение автомодельности в распределении измеренных p_0' при малых $\overline{\mathrm{Re}}_\chi$ наступает при больших $\overline{\mathrm{Re}}_\chi$, чем для плотности. Ввиду этого на рис. 2.50 все кривые для распределений p_0' приведены только для одного значения $N=5000$.

На участке между срезом сопла с диском Маха согласно представленным на рис. 2.45 и 2.50 результатам следует, что при $\overline{\mathrm{Re}}_X > 100$ влияние вязкости проявляется в основном только в слое смешения за висячим скачком уплотнения. При этом диаметр висячего скачка, расстояние до диска Маха и распределение параметров в изоэнтропийном ядре при $\mathrm{Re}_X \geqslant 400$ близки к рассчитанным по модели невязкого газа [3], а толщины скачков уплотнения пренебрежимо малы.

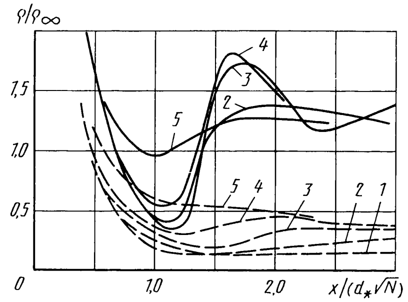


Рис. 2.50 Изменение осевых распределений плотности и полного напора в ламинарной затопленной струе при изменении $\overline{\mathrm{Re}}_X$ ($M_a = 1$; $\gamma_a = 1{,}4$; $i_0 = 1$; $N > 100$):

Кривые 1, 2, 3; 4, 5 отвечают значениям $\mathrm{Re}_X = 1160,\ 730;\ 280;\ 130,\ 25$

Сопоставление измеренных значений максимальной плотности в сжатом слое $\varrho_{\max}$ при $x/(r_* \sqrt{N}) = 1{,}2$, $\overline{\mathrm{Re}}_X = 900$ и $\overline{\mathrm{Re}}_X = 280$ (см. кривые *1* и *2* на рис. 2.45) с рассчитанными величинами ϱ_s за тонким висячим скачком показали, что $\varrho_{\max} > \varrho_s$. В то же время, как показывают результаты экспериментов, местоположение внутренней границы слоя смешения оказывается примерно соответствующим местоположению $\varrho = \varrho_{\max}$. На основании этого можно считать, что при $\overline{\mathrm{Re}}_X > 100$ висячий скачок и слои смешения отделены друг от друга зоной невязкого течения.

Для определения местоположения внутренней границы слоя смешения проводились измерения парциальных плотностей компонентов в струе азота, истекающей из звукового сопла в затопленное пространство, содержащее смесь $N_2 + CO$. Окись углерода подавалась в барокамеру через специальный натекатель. Расходы N_2 и CO определялись по равновесным параметрам в критическом сечении и их диаметру. Результаты измерений поперечных и продольных распределений представлены на рис. 2.51 и 2.52. Здесь сплошными кривыми обозначена суммарная плотность смеси, пунктирными — плотность N_2, а штрихпунктирными — плотность CO. Поперечные распределения на рис. 2.51 и 2.52 измерены в сечении $x/(r_* \sqrt{N}) = 1{,}1$ и соответствуют двум различным режимам: а) $\overline{\mathrm{Re}}_X = 315$, $N = 8{,}85 \cdot 10^4$; б) $\overline{\mathrm{Re}}_X = 40$, $N = 8{,}5 \cdot 10^4$. Параметры для осевого распределения соответствуют $\overline{\mathrm{Re}}_X = 40$, $N = 8{,}5 \cdot 10^4$.

Из рис. 2.51, *а* четко видно, что для случая $\overline{\mathrm{Re}}_X = 315$ проникновение компонента CO становится пренебрежимо малым при значениях координаты y, соответствующей значению $\varrho = \varrho_{\max}$ на кривой суммарной плотности, что и дает право определить эту координату как положение внутренней границы слоя смешения.

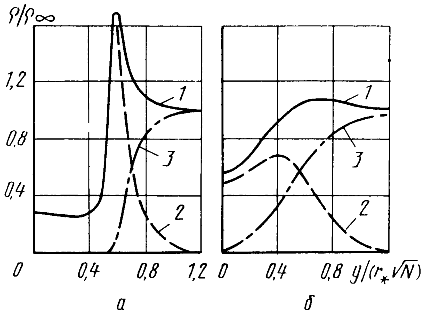


Рис. 2.51. Изменение поперечных распределений концентраций компонентов газа струи (N_2) и газа затопленного пространства (CO) при уменьшении $\overline{\mathrm{Re}}_X$ ($M_a=1$; $\gamma_a=1{,}4$; $i_0=1$, $N=8{,}5\cdot10^4$):

а — $\overline{\mathrm{Re}}_X=300$; *б* — $\overline{\mathrm{Re}}_X=40$, *1* — суммарная плотность; *2* — плотность N_2, *3* — плотность CO

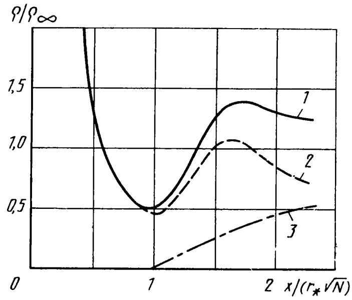


Рис. 2.52. Осевое распределение концентраций компонентов газа струи (N_2) и газа затопленного пространства ($CO+$ $+N_2$) при $\overline{\mathrm{Re}}_X=40$; $M_a=1$, $\gamma_a=1{,}4$, $i_0=1$, $N=8{,}5\cdot10^4$:

1 — суммарная плотность; *2* — плотность N_2; *3* — плотность CO

Перестройку описанной картины течения при уменьшении числа $\overline{\mathrm{Re}}_X$ можно проследить по сериям кривых на рис. 2.45. Здесь можно видеть постепенное утолщение висячего скачка и слоя смешения. При этом диаметр висячего скачка уменьшается, тогда как положение диска Маха остается практически неизменным. При $\overline{\mathrm{Re}}_X<100$ максимальное значение плотности в сжатом слое, измеренное в экспериментах, становится меньше расчетного за тонким косым скачком, что указывает на слияние зон скачка и слоя смешения. Сжатый слой становится полностью вязким, а его утолщение при уменьшении $\overline{\mathrm{Re}}_X$ вместе с утолщением диска Маха приводит к сокращению поперечных и продольных размеров ядра струи. Одновременно происходит существенное изменение характера течения за диском Маха. Из рис. 2.45, *б* видно, как утолщение кольцевого вязкого слоя приводит к тому, что течение за диском Маха становится полностью вязким. Смыкание слоя смешения на оси приводит к увеличению измеряемых плотности и полного напора, и, как следует из рассмотрения продольных распределений ϱ и p_0', представленных на рис. 2.50, это увеличение распространяется в направлении против потока при уменьшении $\overline{\mathrm{Re}}_X$, пока не достигает зоны диска Маха. При $\overline{\mathrm{Re}}_X\sim100$ смыкание вязкого слоя на оси происходит уже непосредственно за диском Маха, оторый при $\overline{\mathrm{Re}}_X\sim100$ нельзя считать изолированной прямой ударной волной. Утолщение вязкого слоя приводит также к увеличению его эжектирующего влияния на течение вблизи оси, вследствие чего в зоне за диском Маха может возникнуть область со сверхзвуковой скоростью.

При снижении числа $\overline{\mathrm{Re}}_X$ до величины порядка $10\ldots20$, когда ударные волны по плотности вырождаются и течение в

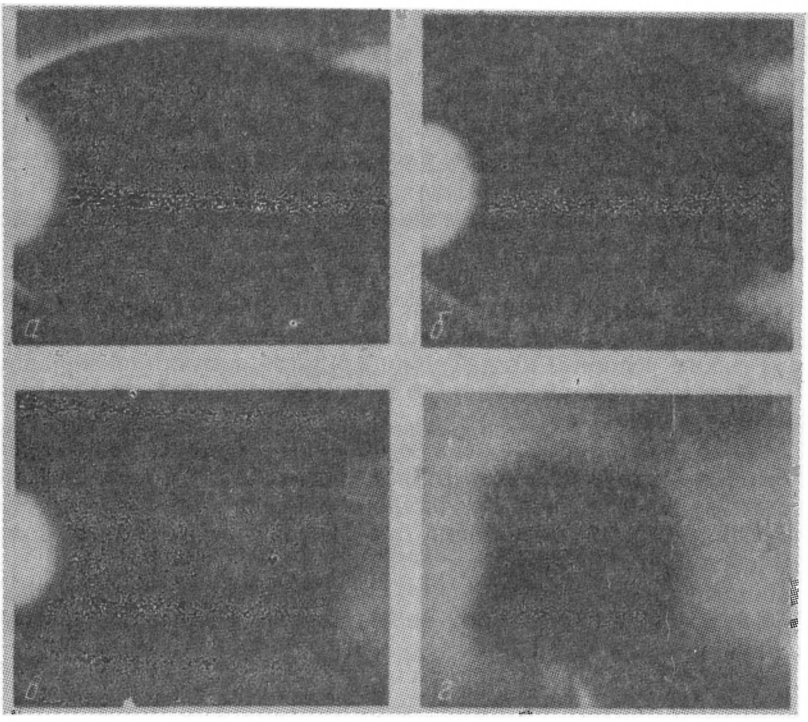


Рис. 2.53 Визуализация перестройки течения в затопленной струе при уменьшении $\overline{\mathrm{Re}}_X$ (получено методом электронного пучка [70], $M_a=1$; $\gamma_a=1{,}4$; $i_0=1$; $N=3000$):

а — $\overline{\mathrm{Re}}_X=300$, *б* — $\overline{\mathrm{Re}}_X=150$, *в* — $\overline{\mathrm{Re}}_X=80$, *г* — $\overline{\mathrm{Re}}_X=40$

струе становится практически полностью вязким (кривая *5* на рис. 2.50), имеет место переход к так называемому *режиму рассеяния* [36]. Здесь длина свободного пробега молекул затопленного пространства становится соизмеримой с поперечными размерами сжатого слоя, вследствие чего проникновение молекул в ядро струи начинает приобретать свободномолекулярный характер. Этот эффект при $\overline{\mathrm{Re}}_X=40$ показан на рис. 2.51, *б* и 2.52.

Описанная перестройка картины течения при переходе к малым значениям $\overline{\mathrm{Re}}_X$ качественно иллюстрируется на рис. 2.53 серией фотографий визуализации истечения струи при $N=3000$ и следующих числах $\overline{\mathrm{Re}}_X$: *а*) $\overline{\mathrm{Re}}_X=310$; *б*) $\overline{\mathrm{Re}}_X=150$; *в*) $\overline{\mathrm{Re}}_X=80$; *г*) $\overline{\mathrm{Re}}_X=40$. В предельном случае $\overline{\mathrm{Re}}_X\to 0$ имеет место истечение в вакуум.

Ранее было отмечено, что при малых значениях числа $\overline{\mathrm{Re}}_X$ было обнаружено нарушение автомодельности по N в распределении параметров. Полученные в работе результаты позволяют указать причины этих нарушений.

Прежде всего отметим, что автомодельность распределений параметров по N на начальном участке носит приближенный характер и выполняется тем лучше, чем больше N и чем больше расстояние рассматриваемого сечения от среза сопла. На небольших расстояниях от среза, где скорость истекающего газа еще заметно меньше предельной и закон распределения плотности отличается от закона (1.57), соответствующего течению от фиктивного источника, имеют место заметные отклонения от автомодельности.

Как показано ранее, уменьшение числа $\overline{\mathrm{Re}}_X$ приводит к сокращению размеров ядра струи, связанному с утолщением вязкого сжатого слоя и диска Маха. При этом возможно наступление таких условий, когда утолщающиеся вязкие зоны разрушают невязкое течение в ядре до того, как в нем будет сформирован гиперзвуковой поток.

Можно дать приближенную оценку границы нарушения автомодельности. Для этого предположим, что возмущение течения в ядре связано с утолщением диска Маха. Учет утолщения вязкого сжатого слоя практически не изменяет получающейся в итоге оценки.

Из результатов экспериментов следует, что толщина диска Маха и сферической ударной волны хорошо описываются выражением

$$\frac{d_s}{X_S} \approx \frac{40}{40+\overline{\mathrm{Re}}_X}$$

Считая, что размазывание ударной волны в основном происходит вверх по потоку от континуального положения, получаем для размера x_1 невозмущенного течения в ядре следующую оценку

$$\frac{x_1}{r_*} \approx \frac{1{,}3\sqrt{N}}{1+40/\overline{\mathrm{Re}}_X}$$

В качестве меры заметного отклонения от автомодельности примем 10%-ное отличие скорости перед ударной волной от максимально достижимого значения по параметрам торможения. Тогда с точностью до 10% можно считать, что автомодельность имеет место при $x_1/r_* > 10$. Сопоставляя это с последним выражением, находим соответствующий каждому значению $\overline{\mathrm{Re}}_X$ диапазон N, в котором автомодельность распределения параметров по величине N должна выполняться

$$N > 100(1+40/\overline{\mathrm{Re}}_X)^2.$$

Из полученного выражения следует, что уменьшением числа $\overline{\mathrm{Re}}_X$ нарушение автомодельности имеет место при все более высоких значениях величины N. Этот вывод подтверждается приведенными ранее экспериментальными данными.

2.2.5. Приближенный расчет вязкого взаимодействия в затопленной струе

Прежде всего дадим оценку влияния вязкости на характерные размеры X и Y начального участка затопленной струи при ламинарном и турбулентном режимах течения в слое смешения.

Рассмотрим область течения между срезом сопла и сечением $x=X$, ограниченную поверхностью $\tilde{y}(x)$, внутри которой проходит расход газа, равный расходу G_a через сопло. В уравнении количества движения в проекции на ось x учтем составляющую F_m силы трения на поверхности $\tilde{y}(x)$

$$F_m=2\pi\int_0^X \tilde{y}\tilde{\tau}dx=2\pi\int_0^X \tilde{\mu}\tilde{y}\left(\widetilde{\frac{\partial u}{\partial y}}\right)dx, \tag{2.96}$$

где $\tilde{\tau}$, $\tilde{\mu}$, $(\widetilde{\partial u/\partial y})$ — значения величин при $y=\widetilde{y(x)}$. Имеем

$$(p_a+\rho_a W_a^2)\pi r_a^2+2\pi\int_{r_a}^Y \tilde{p}\tilde{y}d\tilde{y}+F_m=2\pi\int_0^Y (p+\rho u^2)ydy. \tag{2.97}$$

Интегральная форма уравнения сохранения энергии для указанной области может быть при $\mathrm{Pr}=1$ записана в следующем виде

$$\rho_a W_a H_a \pi r_a^2+\Phi_m=2\pi\int_0^Y \rho uHydy, \tag{2.98}$$

где

$$\Phi_m=2\pi\int_0^X \tilde{\mu}\tilde{y}\left(\widetilde{\frac{\partial H}{\partial y}}\right)dx \tag{2.99}$$

— количество теплоты, прошедшее через поверхность $\tilde{y}(x)$ на участке $0\leqslant x\leqslant X$. В предположении подобия профилей безразмерных энтальпий и безразмерных избыточных скоростей

$$\frac{1}{H_\infty-H_a}\frac{\partial H}{\partial y}=\frac{1}{u_e-u_i}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.100}$$

величины F_m и Φ_m выражаются одна через другую при помощи следующего конечного соотношения

$$\Phi_m=\frac{H_\infty-H_a}{u_e-u_i}F_m \tag{2.101}$$

или, если приближенно положить $u_e=W_\infty$, $u_i=U_0$, то

$$\Phi_m=\frac{H_\infty-H_a}{W_\infty-U_0}F_m. \tag{2.102}$$

Для невязкого течения $F_m=0$, $\Phi_m=0$, $H=H_a$ и, как показано в подразд. 2.1. 5, с помощью метода нестационарной аналогии можно получить приближенные выражения для характерных размеров X и Y начального участка струи. Размеры X и Y, определенные в невязком приближении, будем отмечать индексом «0».

Если для случая вязкого течения ввести некоторую среднюю на начальном участке продольную скорость $U=\mathrm{const}$, конечно, отличающуюся от соответствующей величины $U_0=W_a\left[1+2/(\gamma_a \mathrm{M}_a^2)\right]^{1/2}$ без учета вязкости, то тогда можно формально провести аналогичный анализ для вязкого течения и получить величины характерных размеров X и Y. Такой анализ показывает, что в первом приближении структура выражений для X и Y сохраняется такой же, как и для X_0, Y_0, но изменяются входящие в них величины характерной продольной скорости и характерного угла расширения струи.

Для характерной продольной скорости U примем оценку

$$U=U_0+F_m/G_a, \tag{2.103}$$

так что при торможении газа в слое смешения при истечении в затопленное пространство $\tilde{\tau}=\tilde{\mu}(\widetilde{\partial u/\partial y})<0$, $F_m<0$ и $U<U_0$ и, наоборот, при ускорении газа в слое смешения высокоскоростным спутным потоком ($W_e>W_i$) имеем

$$\tilde{\tau}=\tilde{\mu}(\widetilde{\partial u/\partial y})>0,\quad F_m>0 \text{ и } U>U_0.$$

В выражение (2.69) для продольного характерного размера $X=L=\left[G_aU_0/(\pi p_\infty)\right]^{1/2}$ вместо U_0 теперь входит $U=U_0+F_m/G_a$. Тогда

$$\frac{X}{X_0}=\left(\frac{U}{U_0}\right)^{1/2}=\left(1+\frac{F_m}{G_aU_0}\right)^{1/2},$$

откуда для случая истечения в затопленное пространство находим, что $X<X_0$.

Величина характерного поперечного размера Y может быть выражена через X и характерный угол течения $\theta=\vartheta\chi^{1/2}$ в виде $Y=\theta X$. Поэтому достаточно рассмотреть влияние вязкости на θ.

Из соотношения (2.98) получим выражение для средней энтальпии $\langle H\rangle$ на рассматриваемом участке течения. Полагая

$$2\pi\int_0^Y \rho uHy\,dy=G_a\langle H\rangle, \tag{2.105}$$

находим

$$\langle H\rangle=H_a+\frac{\Phi_m}{G_a}=H_a+\frac{H_\infty-H_a}{W_\infty-U_0}\frac{F_m}{G_a}, \tag{2.106}$$

так что при $H_\infty<H_a$ $(\widetilde{\partial H/\partial y})<0$; $\langle H\rangle<H_a$ и, наоборот, при $H_\infty>H_a$ $(\partial H/\partial y)>0$; $\langle H\rangle>H_a$.

Поскольку величина полной энтальпии и характерной продольной скорости под воздействием вязкости меняются, то соответственно меняется и запас энергии, расходуемый на кинетическую энергию радиального движения

$$\langle H\rangle - U^2/2. \tag{2.107}$$

Далее, так как отношение

$$\frac{2H_a - U_0^2}{2U_0^2} = \frac{1}{(\gamma_a - 1)(\gamma_a \mathrm{M}_a^2 + 2)}$$

совпадает с выражением для характерного угла расширения ϑ струи невязкого газа (если пренебречь неавтомодельным слагаемым $n^{\frac{1-\gamma_a}{\gamma_a}}$), то с учетом вязкости имеем

$$\vartheta^2 = \frac{2\langle H\rangle - U^2}{2U^2} = \frac{2H_a}{U^2} - \frac{H_\infty - H_a}{W_\infty - U_0}\frac{2F_m}{G_a U_0} - 1. \tag{2.108}$$

Подставим сюда выражение (2.103) для U, введем обозначения

$$m_0 \approx W_\infty / U_0;\ i_0 = H_\infty / H_a \tag{2.109}$$

и преобразуем, полагая с целью упрощения

$$f_m = F_m / (G_a U_0) \ll 1. \tag{2.110}$$

Тогда получим при $n \gg 10$

$$\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right)^2 = \left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^2 = 1 + \frac{(1+2\theta_0^2)(i_0 - 2m_0 + 1)}{2\theta_0^2(m_0 - 1)} f_m. \tag{2.111}$$

$$\left(\frac{Y}{Y_0}\right)^2 = 1 + \frac{(1+2\theta_0^2)i_0 - 2\theta_0 m_0 + 1}{2\theta_0^2(m_0 - 1)} f_m, \tag{2.112}$$

где для случая истечения в затопленное пространство следует положить $m_0 = 0$,

$$\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^2 = 1 - \frac{(1+2\theta_0^2)(i_0+1)}{2\theta_0^2} f_m = 1 - \frac{H_a}{e_a}(i_0 + 1) f_m; \tag{2.113}$$

$$\left(\frac{Y}{Y_0}\right)^2 = 1 - \frac{(1+2\theta_0^2)i_0 + 1}{2\theta_0^2} f_m. \tag{2.114}$$

Таким образом, количественный эффект вязкого взаимодействия на величины X, θ и Y выражается вторыми членами соотношений (2.104), (2.111) и (2.112), зависящих от параметров m_0, i_0 и f_m.

Найдем приближенное соотношение для параметра $f_m = F_m / G_a U_0$, выражающее отношение вязких и инерционных сил в начальном участке струи. Рассмотрим случай, когда $m_0 = 0$.

Приближенно положим $(\partial \tilde{u}/\partial y) = -U_0/\delta$, где δ определено по 10%-ному отклонению безразмерных профилей избыточных скоростей и полных энтальпий от своих значений в прилежащих невязких зонах течения. Будем также считать, что уравнение линии $\tilde{y}(x)$ постоянного расхода $G=G_a$ совпадает с уравнением границы струи $y_2(x)$ в невязком течении. Для оценки величины статической энтальпии $\bar{h}$ на линии $\bar{y}(x)$ примем выражение (2.89), соответствующее значению безразмерной избыточной энтальпии торможения, равному 0,5. После преобразований получим

$$f_m = -\varsigma \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}-1} \cdot \frac{\theta_0}{1+2i_0}, \tag{2.115}$$

где для турбулентного режима течения

$$\varsigma = \varsigma_т = 10{,}6\varkappa; \tag{2.116}$$

для ламинарного режима течения

$$\varsigma = \varsigma_l = 4{,}7/\sqrt{\overline{\mathrm{Re}}_X}, \tag{2.117}$$

а $\bar{\gamma}$ — отношение удельных теплоемкостей смеси газов струи и спутного потока на линии $\bar{y}(x)$.

Рассмотрим конкретно характер и определяющие параметры вязкого взаимодействия при турбулентном и ламинарном режимах течения.

Турбулентный режим. При $m_0=0$ взаимодействие определяется энтальпийным фактором i_0 и не зависит от числа Рейнольдса. Имеем при $\bar{\gamma}=1{,}4$

$$f_m = -\frac{37\varkappa\theta_0}{1+2i_0}; \tag{2.118}$$

$$\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^2 = 1 + 18{,}5\varkappa \frac{1+2\theta_0^2}{\theta_0} \frac{1+i_0}{1+2i_0}; \tag{2.119}$$

$$\left(\frac{Y}{Y_0}\right)^2 = 1 + 18{,}5\varkappa \frac{1+(1+2\theta_0^2)i_0}{\theta_0(1+2i_0)}; \tag{2.120}$$

$$\left(\frac{X}{X_0}\right)^2 = 1 - \frac{37\varkappa\theta_0}{1+2i_0}. \tag{2.121}$$

Видим, что влияние энтальпийного фактора i_0 на поперечный размер Y и характерный угол θ относительно невелико. Из выражения (2.121) следует, что с увеличением подогрева газа струи (уменьшение i_0) характерный продольный размер уменьшается в большей степени.

Ламинарный режим. При $m_0=0$ вязкое взаимодействие определяется параметрами i_0 и $\overline{\mathrm{Re}}_X$. Если выразить $\overline{\mathrm{Re}}_X$ через число Рейнольдса по условиям на срезе сопла $\mathrm{Re}_a \approx \mathrm{Re}_*$ и перепад давлений $N_*=p_*/p_\infty$ в соответствии с соотношением (2.91), то при $\gamma_a=\bar{\gamma}=1{,}4$ будем иметь, что

$$f_m=-3{,}3\theta_0\,[\sqrt{N_*}/\mathrm{Re}_*]^{1/2} \tag{2.122}$$

не зависит от энтальпийного фактора i_0. Для θ, Y и X находим

$$\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^2=1+\frac{1{,}65(1+2\theta_0^2)(1+i_0)}{\theta_0}\left[\frac{\sqrt{N_*}}{\mathrm{Re}_*}\right]^{1/2}; \tag{2.123}$$

$$\left(\frac{Y}{Y_0}\right)^2=1+\frac{1{,}65[1+i_0(1+2\theta_0^2)]}{\theta_0}\left[\frac{\sqrt{N_*}}{\mathrm{Re}_*}\right]^{1/2}; \tag{2.124}$$

$$\left(\frac{X}{X_0}\right)^2=1-3{,}3\theta_0\left[\frac{\sqrt{N_*}}{\mathrm{Re}_*}\right]^{1/2}. \tag{2.125}$$

Из этих выражений следует, что при $N_*=\mathrm{const}$ нагрев газа струи (уменьшение i_0) приводит к относительному уменьшению θ и Y в сравнении с их величинами, соответствующими $i_0=1$. Продольный размер X оказывается независящим от параметра i_0 согласно соотношению (2.125).

Последнее не согласуется с заключением авторов работы [31] об увеличении длины бочки на 25% при подогреве газа струи (при $n=10$, $\mathrm{M}_a=1$, $\mathrm{Re}_*=10^3$) до температуры, соответствующей значению энтальпийного фактора $i_0=0{,}1$. В связи с этим сделаем следующие замечания.

Конкретных данных по структуре струи, иллюстрирующих данное заключение, авторами работы [31] не приводится. Можно полагать, что такое заключение сделано ими по полученным в расчетах результатам о конфигурации висячего скачка уплотнения, поскольку об определении поверхности постоянного расхода $G=G_a$ авторами не упоминается. Между тем, по-видимому, из-за особенностей принятой схемы в расчетах не удавалось получить реализации с образованием диска Маха для тех режимов, где в экспериментах [13] последний достаточно четко фиксировался. По расчетным данным авторов висячий скачок распространяется вплоть до пересечения с осью струи без образования диска Маха. Благодаря этому небольшие изменения в поперечных размерах висячего скачка при изменении i_0 могли приводить к заметным изменениям расстояния до его пересечения с осью и таким образом давать кажущееся изменение длины бочки.

Общим выводом, следующим из выражений (2.118) ... (2.125) для турбулентного и ламинарного режимов, является вывод о том, что воздействие вязкости приводит к оттеснению границы струи (поверхности $G=G_a$) в сторону затопленного пространства, что согласуется с экспериментальными данными [13]. Также видно, что имеются различия в проявлениях вязкого взаимодействия при ламинарном и турбулентном режимах.

Эксперименты показывают, что вязкий слой смешения вызывает оттеснение висячего скачка к оси струи. Этот эффект можно объяснить следующим образом. Из уравнения движения в проекции на нормаль к линии тока следует, что

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\varrho W^2 \frac{\partial \theta}{\partial s}.$$

Это уравнение выражает баланс сил, действующих на элементарную массу газа: силы, обусловленной перепадом давлений, и центральной силы. В слое смешения ϱW^2 уменьшается по сравнению со своим значением в области невязкого течения за висячим скачком, что вызывает соответствующее уменьшение градиента статического давления. Поскольку статическое давление в окружающей среде является заданным, уменьшение градиента фактически вызывает возрастание давления внутри сжатого слоя вблизи внутренней границы слоя смешения, в результате чего висячий скачок и смещается к оси струи.

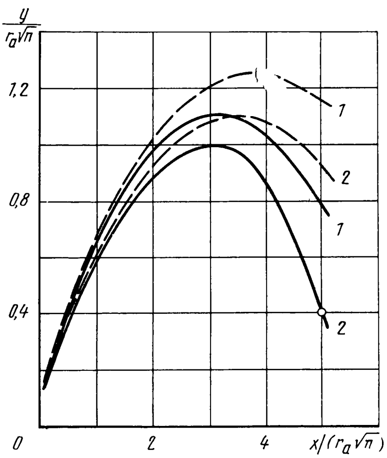


Рис. 2.54 Влияние $k_т$ на форму висячего скачка (сплошные кривые) и границы (пунктирные кривые) недорасширенной струи ($M_a=3{,}1$; $n=10^2$; $\gamma_a=1{,}4$; $\theta_a=0$): *1* — $k'_т=0$, *2* — $k'_т=0{,}024$, ○ — координата центрального скачка, эксперимент

Исходя из такого механизма оттесняющего действия слоя смешения можно построить приближенную модель вязкого взаимодействия в затопленной струе. Пусть известна струя невязкого газа, которая моделирует форму висячего скачка, а следовательно, и область невязкого течения за ним в реальной струе с вязким слоем смешения. Введем эффективную толщину слоя смешения δ_{ef} как расстояние от границы этой невязкой струи до некоторой линии, на которой давление равно заданному давлению p_∞ в окружающей среде. Естественно, что давление на границе этой струи будет больше p_∞. Будем считать, что δ_{ef} изменяется пропорционально расстоянию вдоль границы и не зависит от числа Рейнольдса при турбулентном режиме течения в слое смешения, а при ламинарном режиме — изменяется обратно пропорционально числу Re_S, вычисленному по этому расстоянию. Чтобы учесть осесимметричность течения, введем эффективную длину согласно соотношениям (1.73), (1.77). Итак, положим $\delta_{ef}=k'_т S_т$ —

при турбулентном режиме, $\delta_{ef}=k'_l\,\mathrm{Re}_S^{-0,5}S_l$ — при ламинарном режиме.

Использовался последний метод характеристик. В процессе расчета на каждом шаге подбиралось такое значение давления на границе струи, чтобы на расстоянии δ_{ef} от этой границы статическое давление в сжатом слое было равно p_∞. Численное значение коэффициентов $k'_т$ и k'_l были подобраны путем согласования расчетных и экспериментальных данных по D_S. Оказалось, что следует принять $k'_т=0{,}08n^{-0{,}25}$ и $k'_l=0{,}83n^{-0{,}25}$.

Пример расчета струи показан на рис. 2.54, сплошная линия означает висячий скачок, пунктирная — границу струи. Видно, что висячий скачок оттесняется именно в области за максимальным сечением. Максимальный диаметр скачка уменьшается всего на 10%.

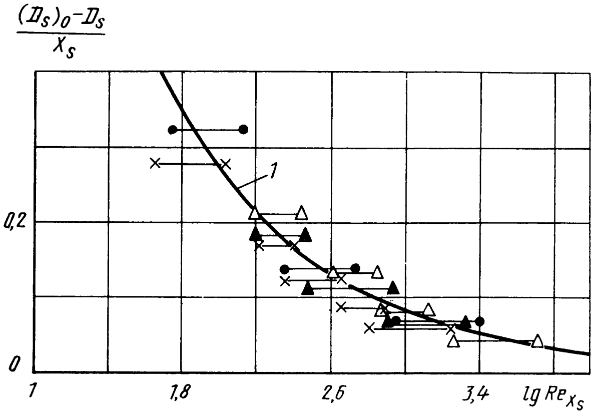


Рис. 2.55. Сравнение расчетных и экспериментальных данных по влиянию ламинарного пограничного слоя на D_S:

1 — эксперимент; значки — расчет

	×	●	△	▲
M_a	1,5	2	3,1	3,1
n	10^2	10^2	10^2	10^4

Расчеты показали, что при выбранных коэффициентах нарастания эффективной толщины слоя смешения выполняется установленная в экспериментах [13] автомодельность величины $(D_{S0}-D_S)/X_S$ по числу M_a и нерасчетности (при $n\geqslant10^2$). На рис. 2.55 приведены результаты расчетов для ламинарного режима в слое смешения. Каждому варианту расчета соответствует горизонтальный отрезок. Неопределенность величины Re_{X_S} связана с тем, что при практической реализации расчетной модели величина k'_l в каждом конкретном расчете не была строго постоянной, а могла изменяться в пределах примерно $\pm20\%$. Это изменение можно интерпретировать как изменение числа Re_{X_S}, поскольку

$$\delta_{ef}/r_a = k_l' \mathrm{Re}_S^{-0,5} S_l/r_a = k_l' \mathrm{Re}_{X_S}^{-0,5} \left(\frac{X_S}{r_a}\right)^{0,5} \left(\frac{S_l}{r_a}\right)^{0,5},$$

т. е. фактически δ_{ef} зависит от величины $k_l' \mathrm{Re}_{X_S}^{-0,5}$.

Сплошной линией на рис. 2.55 изображена экспериментальная зависимость $(D_{S0}-D_S)/X_S=2,7\mathrm{Re}_{X_S}^{-0,5}$. Видно, что в соответствии с экспериментом величина $(D_{S0}-D_S)/X_S$ слабо зависит от M_a и n.

Другой возможный механизм влияния вязкости на волновую структуру начального участка недорасширенной струи связан с пограничным слоем на срезе сопла. В работе [16] проведены расчеты формы границы и висячего скачка недорасширенной струи с учетом пограничного слоя сопла, причем сверхзвуковая часть пограничного слоя моделировалась невязким завихренным потоком. Оценки возможного влияния пограничного слоя сопла приведены в работе [16] для $n=25 \ldots 10^3$, $M_a=3,1$, $\gamma_a=1,4$, $\theta_a=0$. На расстоянии $\delta/r_a=(0,1 \ldots 0,15)$ от стенки сопла задавался линейный или параболический профиль чисел Маха, причем минимальное число M на стенке сопла было равно 1,25. Было установлено, что наличие неравномерного профиля чисел M в пристеночном слое заметно сказывается на форме границы струи и висячего скачка в области за максимальным сечением. При этом диаметр висячего скачка в области образования центрального скачка значительно уменьшается, что приводит к улучшению соответствия расчета с экспериментом по размеру центрального скачка. В результате в работе [16] сделан вывод, что отличие расчета (в пренебрежении вязкостью) и эксперимента по величине центрального скачка, если не полностью, то в значительной степени объясняется влиянием пограничного слоя на выходной кромке сопла.

Влияние пограничного слоя сопла прежде всего связано с изменением начального угла границы струи. В пограничном слое статическое давление практически постоянно, а число Маха меньше чем в ядре потока. Чем меньше число Маха, тем больше угол поворота потока при расширении газа до одного и того же давления.

Измерения показывают, что действительно начальный угол расширения струи, особенно при больших M_a и n, превышает величину, рассчитанную по значению числа Маха в ядре потока на срезе сопла.

Качественно исследовать влияние этого фактора можно, варьируя начальное распределение угла наклона вектора скорости на срезе сопла. Распределение числа Маха задавалось равномерным, а распределение угла наклона вектора скорости в виде $\theta|\theta_a=(y/r_a)^{\alpha}$, где α — параметр. При $\alpha=1$ получаем распределение угла наклона, близкое к распределению в коническом сопле.

С увеличением параметра α получаем вблизи кромки локальную область с большими значениями угла наклона вектора скорости. Тем самым можно приближенно смоделировать указанный эффект пограничного слоя сопла.

Некоторые результаты этих модельных расчетов, проведенных послойным методом характеристик, приведены на рис. 2.56. Здесь изображена форма висячего скачка для случая $M_a=3{,}1$, $n=10^2$, $\gamma_a=1{,}4$. Расчет с $\theta_a=0$ соответствует отсутствию пограничного слоя на срезе сопла. Величина $\theta_a=20°$ соответствует изменению начального угла наклона границы струи при изменении числа Маха от $M=3{,}1$ до $M=1$ при $n=10^2$, $\gamma_a=1{,}4$. Сравнение расчета для $\theta_a=0$ с расчетами для $\alpha=3$ и 5 при $\theta_a=20°$, показывает, что в сечении, где образуется центральный скачок $(x/r_a n^{0,5} \simeq 5)$, изменение диаметра висячего скачка (или центрального скачка) незначительно, хотя можно отметить некоторое уменьшение D_S при увеличении α.

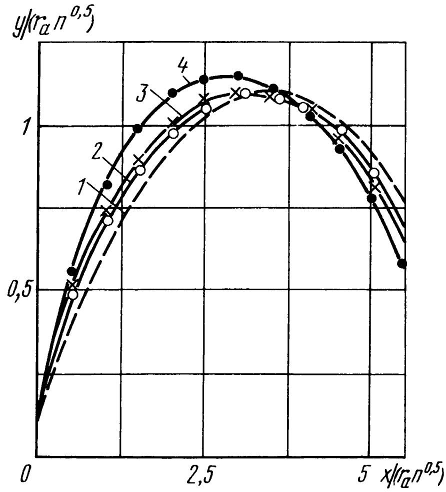


Рис. 2.56. Моделирование влияния пограничного слоя сопла на висячий скачок ($M_a=3{,}1$; $n=10^2$, $\gamma_a=1{,}4$):
1 — $\theta_a=0$; *2, 3, 4* — $\theta_a=20°$; $\alpha=1, 3, 5$

Поэтому объяснить этим фактором отмеченное в работе [16] значительное оттесняющее действие пограничного слоя сопла на висячий скачок нельзя.

С другой стороны, при моделировании пограничного слоя сопла неравномерным потоком с малыми сверхзвуковыми числами Маха вблизи границы струи образуется энтропийный слой с низкими значениями ϱv^2 по сравнению с ядром сжатого слоя. В результате должен иметь место тот же эффект оттеснения висячего скачка, что и в случае вязкого слоя смешения. По-видимому, именно этим фактором объясняется отмеченное в работе [16] значительное оттесняющее действие пограничного слоя сопла. А поскольку в струе вязкого газа этот энтропийный слой, обусловленный достаточно тонким пограничным слоем сопла, быстро поглощается слоем смешения, то в реальных условиях определяющим фактором является оттесняющее действие вязкого слоя смешения струи.

2.2.6. Переходный и основной участки

Переходным участком в неизобарических сверхзвуковых струях обычно называют область, расположенную ниже по течению от зоны взаимодействия висячего скачка уплотнения начального участка с осью и выше по течению от изобарической области. Течение в переходном участке характеризуется сравнительно невысокой степенью неизобаричности. При взаимодействии висячего скачка начального участка с осью струи давление за областью взаимодействия вблизи оси превышает давление в окружающем пространстве p_∞. Это превышение может при больших степенях нерасчетности течения составлять 3...4 раза. При этом приближенно возникает картина, соответствующая истечению некоторой новой струи на режиме недорасширения, с возникновением повторной бочкообразной структуры и бочкообразным висячим скачком. За второй бочкообразной структурой возможно образование третьей и т. д. Если бы в струе отсутствовали явления вязкого перемешивания, диффузии и теплопроводности, то число таких бочкообразных структур было бы очень большим [22], поскольку диссипативные эффекты проявлялись бы из-за образования скачков уплотнения и были бы достаточно малы из-за слабой интенсивности последних.

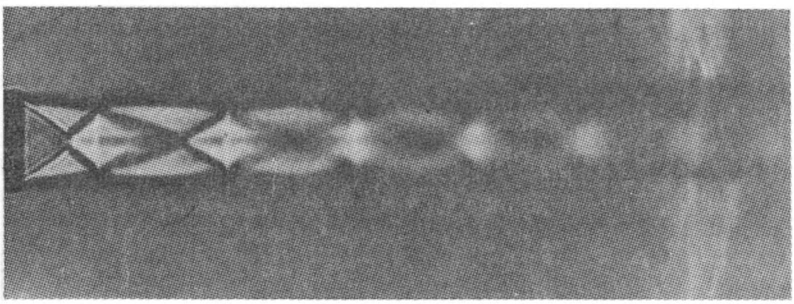


Рис. 2.57. Фотография перерасширенной струи, истекающей в затопленное пространство (n=0,5; M_a=3)

Однако, как показывают опыты, число наблюдаемых бочкообразных структур в неизобарических струях является ограниченным. Только при незначительном отличии степени нерасчетности истечения от единицы ($n<3$) может наблюдаться около десятка бочек. В качестве иллюстрации на рис. 2.57 представлена фотография истечения перерасширений турбулентной струи в затопленное пространство при степени нерасчетности n=0,35 из сопла с числом M_a=3 на срезе. Хорошо видна серия из нескольких почти повторяющих друг друга и слабо затухающих бочкообразных структур до некоторого сечения, в котором обычно бочкообразный характер резко разрушается. При степенях нерасчетности истечения $n<3$ длины бочкообразных структур невелики. На небольшой длине нескольких таких бочек в слой смешения, развивающийся на границе струи, не успевает войти заметная доля истекающего газа. Последнее осуществляется только на расстоянии по порядку, равном десятку длин бочек.

Отметим, что истечение слабых неизобарических струй с несколькими бочкообразными структурами сопровождается интересными акустическими явлениями. В спектре шума турбулентных неизобарических струй небольшой степени нерасчетности возникают дискретные составляющие, частоты которых связаны с частотой данной многобочечной структуры. Показано [14], что такое явление обусловлено возникновением обратной связи между источниками акустических волн, расположенных в узлах периодической струйной структуры, и внешним акустическим полем. Эта обратная связь осуществляется посредством турбулентного слоя смешения.

Увеличение степени нерасчетности истечения обусловливают две причины, приводящие к уменьшению числа повторных бочкообразных структур переходного участка.

Одна из этих причин состоит в вовлечении больших масс истекающего газа в процессе вязкого перемешивания и диссипации его кинетической энергии уже на длине начального участка струи. Как будет показано, при определенных условиях слой смешения в конце начального участка может стать сравнимым с поперечным размером всей струи и сомкнуться на оси, так что течение в струе станет полностью вязким. Вторая причина состоит в том, что с увеличением степени нерасчетности истечения значительно возрастает диссипация энергии в теперь уже интенсивных скачках уплотнения.

В целом можно утверждать, что описание течения в переходном участке струи без учета вязкости становится в значительной степени абстракцией по отношению к реальной картине.

Отметим, что возможные реализации структуры переходного участка чрезвычайно разнообразны и к настоящему времени пока не проведено систематических параметрических исследований и соответствующих обобщений как теоретическими, так и экспериментальными методами.

Наличие ударных волн, а также возникающих при их пересечении поверхностей тангенциального разрыва в значительной степени способствует турбулизации течения в этой части струи, ввиду чего турбулентный режим является наиболее типичным режимом для переходного участка.

Поскольку тонкая структура этой области струи изучена недостаточно, то представляет интерес иметь хотя бы оценку о ее протяженности. В качестве границы, отделяющей течение в переходном участке от основного, можно принять координату X_* сечения струи, в котором слой смешения смыкается на оси, так как за этим сечением эффекты вязкости, действующие по всему сечению, достаточно быстро приводят к выравниванию давления во всем поле течения.

В то же время опыты и наблюдения показывают, что некоторая средняя линия слоя смешения ниже по течению от начального участка на достаточно большом протяжении располагается примерно на одном и том же расстоянии от оси.

На этом основании будем считать, что такой средней линией является линия $\overline{y(x)}=y_{0,5}(x)$, на которой значения избыточных скорости и полной энтальпии равны 0,5. Кроме того, будем считать, что влияние слабых ударных волн в переходном участке не влияет на темп нарастания слоя смешения.

Рассмотрим случай, соответствующий достаточно большой степени нерасчетности истечения ($n>10$) и турбулентному режиму. Полагая, что $\overline{y(x)}\approx Y=\mathrm{const}$, а темп нарастания слоя смешения примерно тот же, что и в начальном участке $\delta(X_*)/\delta(X)=X_*/X$, получаем с использованием выражения (2.78) для толщины слоя смешения $\delta(X_*)$ и условия прихода на ось внутренней границы струи в виде $0{,}5\delta(X_*)\approx Y$ следующую оценку для координаты X_*

$$\frac{X_*}{X}\approx\frac{\delta(X_*)}{\delta(X)}\approx\frac{2Y}{\delta(X)}\approx\frac{0{,}1}{\varkappa}\,\frac{Y}{X}\approx 5{,}5\theta.$$

С учетом выражения (2.56) для θ находим

$$\frac{X_*}{X}\approx 5{,}5\left[(\gamma_a-1)(\gamma_a\mathrm{M}_a^2+2)\right]^{1/2}.$$

Например, при $\gamma_a=1{,}4$; $\mathrm{M}_a=3$ последнее дает $X_*/X\approx 2$. Экспериментально наблюдаемые величины оказываются несколько меньшими. Это объясняется тем, что влияние дополнительных турбулизирующих факторов (скачков, поверхностей тангенциального разрыва) здесь не учитывается. Качественно согласуется с экспериментальными наблюдениями уменьшение относительного положения сечения X_*/X с возрастанием числа M_a.

Подобным же образом можно сделать оценку и для ламинарного режима течения. При этом, если ограничиться сравнительно невысокими значениями чисел Рейнольдса ($\overline{\mathrm{Re}}_X\ll 10^3$), чему будут соответствовать небольшие протяженности переходного участка, то тогда можно для грубой оценки принять линейный темп нарастания слоя смешения. При этом получим для ламинарного режима

$$\frac{X_*}{X}\approx 0{,}5\theta\overline{\mathrm{Re}}_X^{1/2}\approx 0{,}5\overline{\mathrm{Re}}_X^{1/2}\left[(\gamma_a-1)(\gamma_a\mathrm{M}_a^2+2)\right]^{-1/2}.$$

Например, при $\overline{\mathrm{Re}}_X=10^2$ имеем $X_*\approx 5\theta X$, что для $\gamma_a=1{,}4$, $M_a=3$ дает $X_*\approx 2X$.

Для случая, когда степень нерасчетности истечения не превышает нескольких единиц и скачки уплотнения являются слабыми как в переходном, так и начальном участках, темп нарастания слоя смешения приближается к такому, который соответствует истечению изобарической сверхзвуковой струи. При этом координату X_*, отвечающую приходу на ось внутренней границы y_i слоя смешения, можно оценивать как длину изоэнтропийного ядра изобарической струи. В связи с этим представляет интерес рассмотреть последний случай с учетом скоростной сжимаемости. В проводимом далее анализе изобарической струи ограничимся случаем турбулентного режима и не очень большими отличиями молекулярных масс истекающего газа и газа окружающего затопленного пространства.

Для определения толщины δ слоя смешения и длины изоэнтропийного ядра турбулентной сверхзвуковой изобарической струи применим тот же вариант интегрального метода, что изложен в подразд. 1.3.3 применительно к слою смешения начального участка неизобарической струи. Основные отличия данного варианта от известного классического [14] состоят в двух основных моментах, введенных с целью учета скоростной сжимаемости и осесимметричности.

Во-первых, здесь полагается, что профили избыточных скоростей и полной энтальпии являются автомодельными по безразмерной переменной, получающейся путем перехода от поперечной координаты y с помощью преобразования типа Дородницына—Манглера. Во-вторых, модифицируется вторая формула Прандтля для коэффициента турбулентной вязкости $\mu_т$ А именно, принимается, что величина последнего является постоянной поперек вязкой области в данном сечении и равна

$$\mu_т=\varkappa\bar{\rho}\,|u_i-u_e|\,\Lambda,$$

где $\bar{\varrho}$ — значение плотности на линии $\overline{y(x)}$ в слое смешения, на которой $\bar{H}=0{,}5(H_a+H_\infty)$ и $\bar{u}=0{,}5(u_a+u_\infty)$, а масштаб турбулентности Λ определяется выражением

$$\Lambda=(u_e-u_i)/(\partial u/\partial y)_{\max}.$$

Вводя вместо координат x и y новые безразмерные переменные σ и φ по формулам

$$\sigma-\sigma_0=\frac{\bar{\varrho}}{\rho_a}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{y}{r_a}dx;\quad x-x_0=\frac{\rho_a}{\bar{\rho}}\int\limits_{\sigma_0}^{\sigma}\frac{r_a}{y}d\sigma; \tag{2.126}$$

$$\varphi=\frac{1}{\rho_a r_a\delta_D}\int\limits_{y_i}^{y_c}\rho y\,dy;\quad y^2=y_i^2+2r_a\delta_D\int\limits_0^{\varphi}\frac{\rho_a}{\rho}d\varphi, \tag{2.127}$$

где δ_D — преобразованная толщина слоя смещения, уравнения сохранения избыточного импульса и диссипации кинетической энергии при $u_\infty=0$,

$$\rho_a u_a y_i^2+2\int\limits_{y_i}^{y_e}\rho u^2 y dy=\rho_a u_a^2 r_a^2;$$

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{y_i}^{y_e}\rho u^2(u_a-u)ydy=2\int\limits_{y_i}^{y_e}\mu_\text{т}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 ydy,$$

преобразуются к виду, аналогичному случаю несжимаемого плоского течения,

$$y_i^2+2A_2 r_a\delta_D=r_a^2; \qquad (2.128)$$

$$\frac{d\delta_D}{d\sigma}=\omega, \qquad (2.129)$$

где
$$A_2=\int\limits_0^1 f^2 d\varphi;\ A_3=\int\limits_0^1 f^3 d\varphi;\ A_4=\int\limits_0^1\left(\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right)^2 d\varphi;$$

$f=u/u_a$ — безразмерный автомодельный профиль скорости

$$\omega=\frac{2A_4}{A_2-A_3}\varkappa\left|\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right|_{\max}^{-1}. \qquad (2.130)$$

В новых переменных из уравнения (2.129) получаем преобразованную толщину δ_D

$$\delta_D=\omega\sigma,$$

а из соотношения (2.128) — преобразованную длину σ_* изоэнтропийного ядра, отвечающую условию $y_i(\sigma_*)=0$,

$$\sigma_*/r_a=1/(2A_2\omega). \qquad (2.131)$$

Обратное преобразование для поперечной координаты осуществляется по второму из соотношений (2.127), в котором интеграл

$$\mathcal{J}_\varphi=\int\limits_0^\varphi\frac{\varrho_a}{\bar{\varrho}}d\varphi$$

легко вычисляется при условии $p(y)=\text{const}$ по заданным автомодельным профилям скорости $f=u/u_a$ и полной энтальпии $\Delta H=(H-H_\infty)/(H_a-H_\infty)$. Для нахождения границ слоя смешения y_e и y_i и средней линии $\overline{y(x)}$ в этом слое имеем

$$y_e^2=r_a^2+2r_a\omega(J_1-A_2)\sigma; \qquad (2.132)$$

$$y_i^2=r_a^2-2r_a\omega A_2\sigma; \qquad (2.133)$$

$$\bar{y}^2 = r_a^2 + 2r_a\omega(J_{0,5} - A_2)\sigma, \tag{2.134}$$

где

$$J_1 = \int\limits_0^1 \frac{\rho_a}{\rho} d\varphi;$$

$$J_{0,5} = \int\limits_0^{0,5} \frac{\rho_a}{\rho} d\varphi.$$

Однако здесь пока не найдена явная связь между x и σ. Для ее нахождения подставим соотношение (2.134) в дифференциальную связь $d\sigma/dx = (\bar{\varrho}\,\bar{y})/(\varrho_a r_a)$ и результат проинтегрируем. Получим

$$\omega(J_{0,5} - A_2)\frac{x}{r_a} = \frac{\rho_a}{\bar{\rho}}\left[\sqrt{1 + 2\omega(J_{0,5} - A_2)\frac{\sigma}{r_a}} - 1\right]$$

или

$$\sigma = \frac{\bar{\rho}}{\rho_a}x\left[1 + \frac{\omega}{2}(J_{0,5} - A_2)\frac{\bar{\rho}}{\rho_a}\frac{x}{r_a}\right]. \tag{2.135}$$

Подставив последнее соотношение в выражение (2.133) и приравнивая в нем $y_i = 0$, получаем формулу для длины изоэнтропийного ядра

$$\frac{X_*}{r_a} = \frac{\rho_a}{\bar{\rho}} \frac{1}{\sqrt{A_2}\cdot\omega(\sqrt{J_{0,5}} + \sqrt{A_2})}. \tag{2.136}$$

Для течения несжимаемой жидкости $\varrho_a/\bar{\varrho} = 1$, $J_{0,5} = 0{,}5$, т. е. в этом случае

$$\frac{X_{*0}}{r_a} = \frac{1}{\sqrt{A_2}\cdot\omega(\sqrt{0{,}5} + \sqrt{A_2})}. \tag{2.137}$$

Для отношения данных величин в сжимаемом и несжимаемом течениях

$$\frac{X_*}{X_{*0}} = \frac{(\sqrt{0{,}5} + \sqrt{A_2})\,\rho_a}{\sqrt{J_{0,5}} + \sqrt{A_2}\quad\bar{\rho}} \tag{2.138}$$

Задаваясь формой профиля f, вычисляя для него коэффициенты A_2, A_3, A_n, J_1, $J_{0,5}$ и подставляя их в соотношения (2.132) ... (2.134), (2.138), получаем достаточно простые конечные выражения для границ $y_i(x)$, $\overline{y(x)}$ и $y_e(x)$ слоя смешения и длины изоэнтропийного ядра X_*.

Например, для профилей $f = \Delta H = 1 - 3\varphi^2 + 2\varphi^3$ после ряда преобразований находим выражение для X_* в следующем виде

$$\frac{X_*}{X_{*0}} = 1{,}91\,\frac{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M}_a^2\right)(1+2i_0)+1}{\sqrt{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M}_a^2\right)(1+3{,}1i_0)+12{,}5}+3{,}5}, \qquad (2.139)$$

где для воздушных струй по экспериментальным данным [14, 58] $X_{*0} \approx 9$.

Данная зависимость изображена графически на рис. 2.58.

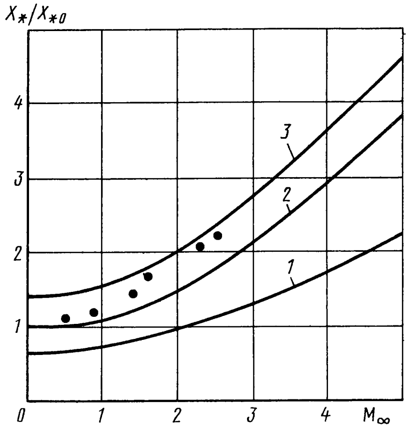


Рис. 2.58. Длина изоэнтропийного ядра изобарической струи — зависимость (2.139) при различных значениях i_0:

1 — $i_0=0{,}5$; *2* — $i_0=1$; *3* — $i_0=2$; ● — экспериментальные данные [74] при $i_0=1$

Сравнение ее с экспериментальными данными [74] указывает на удовлетворительное качественное и количественное соответствие. При подходящем выборе постоянной $\varkappa$ имеется такое же соответствие в конфигурациях границ $y_i(x)$ и $y_e(x)$.

Ниже по течению от сечения $x=X_*$ после смыкания слоя смешения на оси на некотором участке происходит перестройка течения, при которой вырабатываются новые автомодельные профили, соответствующие модели струи источника [14, 58]. Поэтому основным участком более строго называть ту удаленную область струи, где такая перестройка произошла. Однако для практических инженерных расчетов зачастую эту модель применяют выше по течению вплоть до сечения $x=X_*$.

Если использовать такой подход, то изложенный вариант интегрального метода можно распространить на участок струи, лежащий ниже по течению от $x=X_*$. При этом с несколько более грубыми приближениями удается получить достаточно простые соотношения, позволяющие учитывать эффекты сжимаемости на участке, прилегающем к сечению X_*, где эти эффекты не могут заранее приниматься пренебрежимо малыми.

При $x>X_*$ вязкие эффекты, действующие во всем поле течения, приводят к постепенному выравниванию поперечных распределений скорости, плотности и температуры. С увеличением расстояния x скорость на оси $u_m(x)$ монотонно падает.

Уравнения сохранения импульса и уравнение диссипации кинетической энергии для этой области после преобразования к переменным σ, φ по формулам (2.126) ... (2.127), в которых полагается $y_i=0$, преобразуются к следующему виду

$$2A_2\delta_D\lambda^2=r_a; \tag{2.140}$$

$$\frac{d\lambda}{d\sigma}=-\frac{4}{r_a}\varkappa\lambda^3, \tag{2.141}$$

аналогичному для плоского несжимаемого течения [14].

Здесь

$$\frac{d\sigma}{dx}=\frac{\bar{\rho}\bar{y}}{\rho_a r_a};\quad \lambda=\frac{u_m(x)}{u_a}. \tag{2.142}$$

Комбинируя соотношения (2.126) и (2.140), имеем при $y_i=0$

$$\frac{y}{r_a}=\left(\frac{J}{A_2}\right)^{1/2}\frac{1}{\lambda};\quad \frac{\bar{y}}{r_a}=\left(\frac{J_{0,5}}{A_2}\right)^{1/2}\frac{1}{\lambda}. \tag{2.143}$$

Интегрирование уравнения (2.141) дает с учетом первого из соотношений (2.142)

$$x-X_*=-\frac{r_a^2}{4\varkappa}\int\limits_1^{\lambda}\frac{\varrho_a}{\bar{\varrho}}\frac{1}{\lambda^3}\frac{d\lambda}{\bar{y}}, \tag{2.144}$$

после этого задача может считаться принципиально решенной, поскольку входящие в подынтегральное выражение переменные величины $\bar{y}$ и $\bar{\varrho}$ могут быть выражены через переменную λ с помощью уравнения (2.143) и путем определения $\bar{\varrho}$ с использованием автомодельных профилей f и ΔH в слое смешения. Однако в общем случае вычислить интеграл не удается. Тем не менее для чисел $M_a<4$ и температурных факторов i_0, не очень сильно отличающихся от единицы, подынтегральное выражение упрощается для таких значений аргумента λ, когда величиной λ^2 можно уже пренебречь ($\lambda^2\ll 1$). В этом случае интеграл вычисляется, а результатом такого вычисления является выражение, применимое для дальней части струи, где $\lambda=u_m(x)/u_a\leqslant 0{,}5$. Тем не менее можно распространить полученное выражение и на участок $0{,}5\leqslant\lambda\leqslant 1$, рассматривая его здесь как аппроксимацию. Результаты интегрирования имеют следующий вид

$$\lambda=\frac{u_m}{u_a}=\left[1+4\varkappa\sqrt{\frac{h_a}{h_\infty}}\left(\frac{x}{r_a}-\frac{X_*}{r_a}\right)\right]^{-1}, \tag{2.145}$$

где

$$\frac{h_\infty}{h_a}=i_0\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_a^2\right).$$

С помощью формулы (2.143) для обратного преобразования поперечной координаты может быть построен профиль скорости по физической переменной y, а также определена линия $y(\bar{x})$ и внешняя граница струи $y_e(x)$. Подставляя (2.145) в (2.143), находим

$$\frac{y_e}{r_a}=1{,}2\left[1+4\varkappa\sqrt{\frac{h_a}{h_\infty}}\left(\frac{x}{r_a}-\frac{X_*}{r_a}\right)\right]\left[1+\frac{h_\infty}{h_a}+\right.$$

$$\left.+0{,}15(\gamma-1)M_a^2\right] \qquad (2.146)$$

В выражениях (2.139) и (2.146) численные коэффициенты получены с использованием известных [14, 58] профилей для f и ΔH

$$f=(1-\varphi^{3/2})^2;\ \Delta H=1-\varphi^{3/2}.$$

Выражения (2.145) и (2.146) при выборе эмпирической константы в пределах значений 0,025 . . . 0,03 дают удовлетворительное соответствие с экспериментальными данными [14, 58]. В частности, в соответствии с опытом они приводят к качественно правильной зависимости u_m и y_e от температурного фактора. А именно, при увеличении (h_a/h_∞) y_e увеличивается, а относительная скорость на оси уменьшается.

В экспериментах длину X_* фиксировать затруднительно, поэтому наряду с X_* можно ввести характерную длину $X_{0,5}$, на которой u_m/u_a принимает значение 0,5. Нетрудно найти, что

$$\frac{X_{0,5}}{X_*}=1+\frac{0{,}25r_a}{\varkappa X_*}\sqrt{\frac{h_\infty}{h_a}}.$$

3. ИСТЕЧЕНИЕ СТРУИ В СПУТНЫЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ ПОТОК

3.1. ГАЗОДИНАМИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА НАЧАЛЬНОГО УЧАСТКА СВЕРХЗВУКОВОЙ НЕДОРАСШИРЕННОЙ СТРУИ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА В СПУТНОМ СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

3.1.1. Анализ влияния определяющих параметров на структуру начального участка струи

Численное исследование начального участка сверхзвуковой недорасширенной струи, вытекающей из осесимметричного сопла в сверхзвуковой спутный поток, в рамках приближения невязкого газа проведено в работах [16, 25, 52]. Таблицы характеристик течения в таких струях в широком диапазоне изменения определяющих параметров приведены в работе [52]. Используя результаты этих работ, рассмотрим особенности течения на начальном участке струи, обусловленные наличием сверхзвукового спутного потока.

При наличии спутного потока течение в струе невязкого газа зависит от двух дополнительных безразмерных критериев — M_∞ и γ_∞. На рис. 3.1 показано влияние M_∞ на форму границы струи, головной, висячей и отраженной ударных волн. С ростом M_∞ происходит значительное сокращение поперечных и продольных размеров возмущенной области, связанное с уменьшением фактического перепада давлений на кромке сопла из-за образования головной ударной волны в спутном потоке.

Представляет интерес сравнить форму начального участка затопленной и спутной струй. Такое сравнение сделано на рис. 3.2. Здесь показаны струя, вытекающая в спутный поток, с чис-

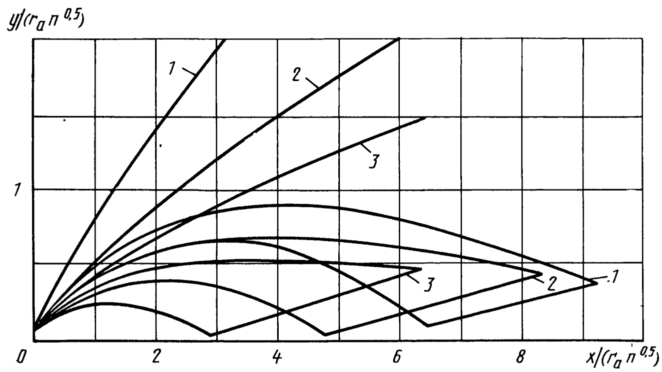


Рис. 3.1. Влияние M_∞ на форму недорасширенной струи при $M_a=3,1$, $n=10^2$, $\gamma_a=\gamma_\infty=1,4$, $\theta_a=0$:
1 — $M_\infty=3$, *2* — $M_\infty=6$; *3* — $M_\infty=10$

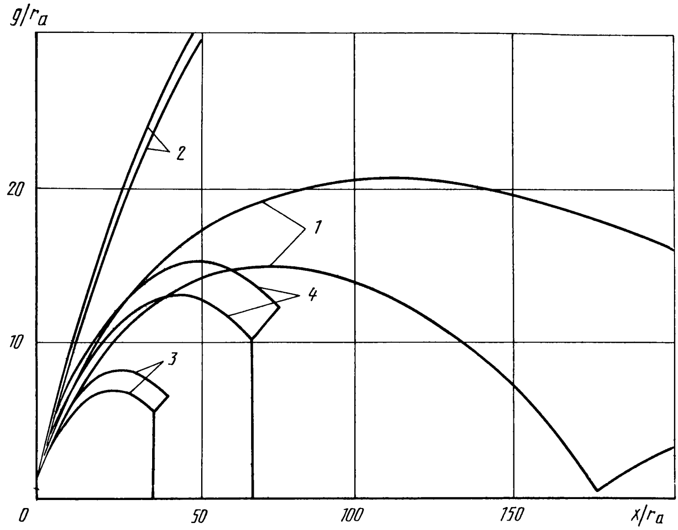


Рис. 3.2. Сравнение форм спутной и затопленной струи ($M_a=3,1$; $\gamma_a=1,4$; $\theta=0$): 1 — $M_\infty=6$, $n=10^3$, 2 — $M_\infty=0$, $n=10^3$, 3 — $M_\infty=0$, $n=44,4$, 4 — $M_\infty=0$, $n=153$

лом $M_\infty=6$ (головная ударная волна в спутном потоке не показана) и три затопленные струи: первая с такой же степенью нерасчетности $n_1=10^3$, вторая — с $n_2=44,4$, которая равна отношению давления на срезе сопла к статическому давлению за ударной волной в спутном потоке в точке ее образования на кромке сопла, третья — со степенью нерасчетности n_3, смысл которой будет пояснен позже.

Сравнение конфигураций струй при одинаковом значении нерасчетности показывает, что спутный поток заметно сжимает струю в результате уменьшения начального угла наклона границы, который определяется степенью нерасчетности n_2. С другой стороны, сравнение струи в спутном потоке с затопленной струей, имеющей тот же самый начальный угол наклона границы, показывает, что при наличии спутного потока струя расширяется сильнее и протяженность начального участка значительно больше. Это связано с различием в распределениях статического давления вдоль границы спутной и затопленной струй.

Статическое давление вдоль всей границы спутной струи монотонно уменьшается до значений, несколько меньших p_∞, а затем в конце начального участка вновь возрастает вследствие эффекта стекания газа к оси симметрии.

Наличие течения разрежения вдоль границы спутной струи и является причиной, объясняющей бо́льшую протяженность начального участка спутной струи, чем затопленной. Действительно, искривление границы затопленной струи обусловлено тем, что в силу постоянства давления вдоль границы падение давления из-за эффекта осесимметричности должно быть компенсировано его повышением в волне сжатия при повороте границы в направлении к оси. В спутной струе давление вдоль границы струи уменьшается и поэтому второй эффект, связанный с искривлением границы, проявляется слабее.

Падение давления вдоль границы спутной струи приводит к более медленному возрастанию интенсивности висячего скачка, чем в затопленной струе, при одном и том же фактическом отношении давлений на кромке сопла. В конечном счете это является причиной того, что при истечении недорасширенной струи в спутный сверхзвуковой поток с $M_\infty \gtrsim 3$ диаметр центрального скачка мал по сравнению с характерным размером струи и практически не зависит от определяющих параметров.

На рис. 3.3 для затопленной и спутной струй показаны зависимости давления за висячим скачком от его относительного диаметра в той области струи, где диаметр висячего скачка уменьшается. При истечении в сверхзвуковой спутный поток в распределении давления за висячим скачком наблюдается минимум, как и в случае затопленной струи, но величина его значительно меньше. В затопленной струе центральный скачок образуется за точкой минимума, когда давление за висячим скачком составляет примерно $0{,}3p_\infty$. Если принять, что при наличии спутного потока центральный скачок также образуется, когда давление за висячим скачком достигает примерно такой же величины, то из рис. 3.3 становится очевидным, что размер центрального скачка в сверхзвуковой спутной струе значительно меньше, чем в затопленной.

Таким образом, можно сделать вывод, что геометрические картины течения, не говоря уже о распределениях газодинамических величин, в спутной и затопленной струях принципиально различаются, и поэтому струю, вытекающую в спутный сверхзвуковой поток, нельзя смоделировать струей, вытекающей в затопленное пространство. Вместе с тем в работе [12] показано, что при достаточно больших степенях нерасчетности в области между соплом и максимальным сечением первой бочки контуры висячих скачков и границ спутной и затопленной струй можно практически подогнать друг к другу, если при определении степени нерасчет-

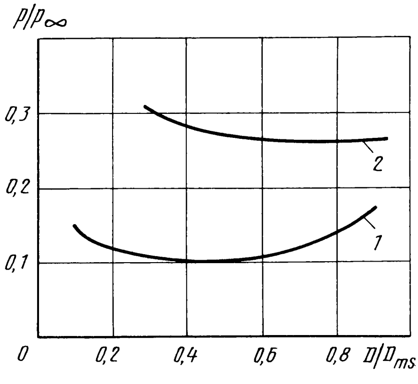


Рис. 3.3. Сравнение распределений давления за висячим скачком в затопленной и спутной струях (условные обозначения, как на рис. 3.2)

ности затопленной струи выбрать в качестве характерного давления в окружающей среде величину

$$p'_\infty=\rho_\infty W_\infty^2\tau^2=\gamma_\infty M_\infty^2\tau^2 p_\infty, \tag{3.1}$$

где τ — характерный угол расширения или относительная толщина струи. Давление p'_∞ представляет величину, вычисленную по формуле Ньютона на стенке, наклоненной к набегающему потоку под углом τ. Величина τ одинакова для затопленной и спутной струи и равна

$$\tau=(1-\mathcal{J}_1)^{1/2},$$

где $\mathcal{J}_1=\mathcal{J}_a/(G_a W_{\max})$, $\mathcal{J}_a$, G_a — импульс и расход газа на срезе сопла; $W_{\max}$ — максимальная скорость истечения. Для сопла с равномерными параметрами на выходе $\mathcal{J}_1$ определяется формулой (2.21).

Для условий спутной струи, изображенной на рис. 3.2, степень нерасчетности n_3, определенная по p'_∞ из соотношения (3.1), равна 153. Соответствующая затопленная струя также изображена на рис. 3.2.

Влияние остальных определяющих параметров n, M_a, γ_a, θ_a на форму начального участка спутной и затопленной струй является качественно сходным.

Как и при истечении в затопленное пространство, форма начального участка спутной струи с увеличением степени нерасчетности приближается к автомодельной в координатах $x/(r_a n^{0,5})$, $y/(r_a n^{0,5})$, см. рис. 3.4. Однако практически эта автомодельность наступает при более высоких значениях степени нерасчетности, чем в случае затопленной струи, поскольку при сверхзвуковых

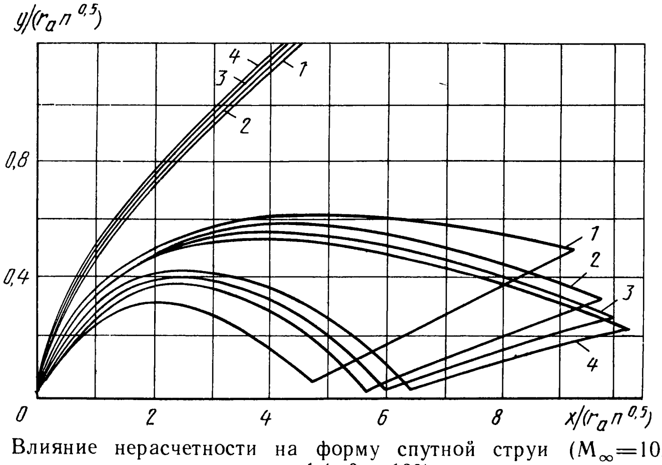


Рис. 3.4 Влияние нерасчетности на форму спутной струи ($M_\infty=10$, $M_p=4$, $\gamma_a=\gamma_\infty=1{,}4$, $\theta_a=10°$):

1 — $n=10^2$, 2 — $n=10^3$, 3 — $n=10^4$, 4 — $n=10^7$

числах M_∞ фактическая величина отношения давлений на выходе сопла существенно меньше n.

При умеренных значениях степени нерасчетности во внешнем потоке реализуется течение с присоединенным к кромке сопла скачком уплотнения. Однако с увеличением степени нерасчетности начальный угол наклона границы струи на кромке может превысить предельное значение для данного числа Маха и должно возникнуть течение с отошедшей ударной волной.

Для моделирования течения при больших значениях степени нерасчетности рассматривались две модели течения [16]. В первой модели предполагается, что расстояние отхода ударной волны по оси струи превышает продольный размер ЛА, из которого истекает струя (рис. 3.5, *а*). Для приближенного описания течения в этом случае истинный контур AB летательного аппарата заменялся контуром A^1B притупленного тела, который плавно сопрягается с границей струи BD.

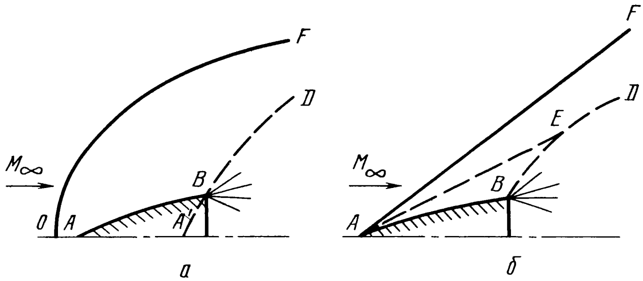


Рис. 3.5. Схемы течения при больших нерасчетностях

Вторая модель течения, так называемая модель «жидкого конуса», соответствует случаю, когда расстояние отхода ударной волны, возникающей перед струей, меньше длины ЛА. Тогда в реальном течении возникает отрыв пограничного слоя от поверхности ЛА. Предполагалось, что длина аппарата такова, что отрыв происходит от носка, граница области отрыва прямолинейна, наклонена к оси струи под углом 45° и плавно сопрягается с границей струи в точке E (см. рис. 3.5, *б*). Давление в зоне отрыва считалось постоянным и равным давлению на поверхности острого конуса, полуугол которого равен углу наклона границы зоны отрыва.

Расчеты [16] недорасширенной струи с использованием обеих моделей течения показали, что в приближении невязкого газа характер взаимодействия струи со спутным потоком при больших степенях нерасчетности заметно сказывается на параметрах течения лишь в примыкающей к соплу области и почти не влияет на них во всей остальной части (90 . . . 95%) начального участка. Приведенные здесь результаты были получены с использованием модели отрывного течения.

Интересная особенность геометрической картины начального участка при изменении γ_a состоит в том, что максимальное расстояние от оси до висячего скачка сохраняется почти постоянным (рис. 3.6). В то же время при изменении γ_a от 1,05 до 1,667 длина начального участка и расстояние до точки отражения висячего скачка возрастают почти вдвое, т. е. сильнее, чем $\gamma_a^{0,5}$, как в случае затопленной струи. При этом значительно уменьшается толщина сжатого слоя струи и в меньшей степени — максимальный размер струи.

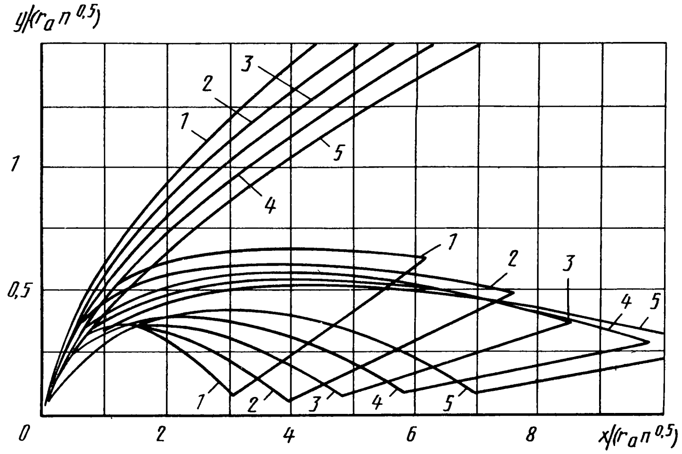


Рис. 3.6. Влияние γ_a на форму спутной струи ($M_\infty=10$, $\gamma_\infty=1,4$, $M_a=4$, $n=10^4$ $\theta_a=10°$):

1 — $\gamma_a=1,05$, 2 — $\gamma_a=1,15$; 3 — $\gamma_a=1,25$, 4 — $\gamma_a=1,4$; 5 — $\gamma_a=1,667$

Сравнение струй при различных числах M_a показывает, что, несмотря на уменьшение начального угла расширения струи, максимальный диаметр ее при увеличении M_a возрастает, хотя и не сильно. В то же время существенно увеличиваются продольные размеры начального участка.

Изменение полуугла сопла в диапазоне $\theta_a=0\ldots20°$ слабо сказывается на форме начального участка, а при $\theta_a=0$ и 10° геометрические картины течения почти совпадают.

Можно отметить существенно неравномерное распределение расхода газа в струе. В сечении, где размер струи максимален, и далее вниз по потоку свыше 90% расхода газа, вытекающего из сопла, сосредоточено в сжатом слое между висячим скачком и границей струи, причем свыше 1/3 его приходится на небольшую окрестность границы струи. Это говорит о том, что в спутной сверхзвуковой струе, как и при $M_\infty=0$, при больших степенях нерасчетности вблизи границы струи образуется мощный вихревой слой.

Рассмотрим распределения газодинамических величин. Распределения давления и плотности в сжатом слое струи имеют тот же характер, что и в случае $M_\infty=0$: давление и плотность возрастают в направлении от висячего скачка к границе струи. Но при наличии спутного потока давление, плотность, а также другие параметры газа изменяются вдоль границы.

Как и в случае затопленной струи, вдали от среза сопла справедлива гипотеза плоских сечений.

Течение во внешней области можно рассматривать как обтекание сверхзвуковым потоком некоторого тела с протоком, внешний контур которого образован границей струи. Поэтому распределения газодинамических параметров в этой области являются аналогичными соответствующим распределениям на осесимметричном теле с протоком и выпуклой образующей.

На рис. 3.7 показаны поля давления в конечном сечении начального участка, причем сплошные линии относятся к области струи между осью и границей, а пунктирные — к области спутного потока.

Безразмерная координата ξ определена на этом рисунке так: $\xi=(y-y_{\min})/(y_{\max}-y_{\min})$ — для сжатого слоя струи и $\xi=(y_{\max}-y)/(y_{\max}-y_{\min})$ — для сжатого слоя спутного потока, где $y_{\min}$, $y_{\max}$ — минимальная и максимальная ординаты соответствующей

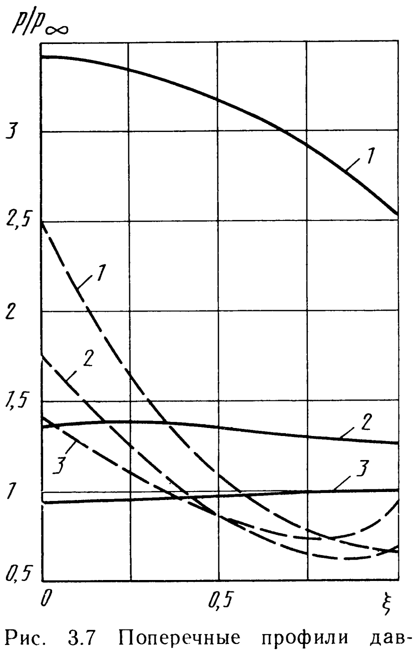


Рис. 3.7 Поперечные профили давления в конце начального участка при различных M_∞ и $M_a=3{,}1$; $n=10^2$; $\gamma_a=\gamma_\infty=1{,}4$; $\theta_a=0$:

1 — $M_\infty=3$; *2* — $M_\infty=6$, *3* — $M_\infty=10$

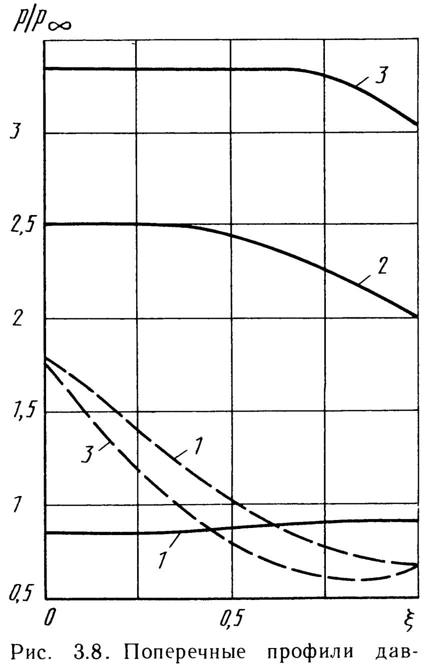


Рис. 3.8. Поперечные профили давления в конце начального участка при различных нерасчетностях и $M_\infty=6$ (остальные условия, как на рис. 3.7):

1 — $n=10$, *2* — $n=10^3$, *3* — $n=10^5$

области, так что границе струи в той и другой области соответствует значение $\xi=1$. Поскольку в этом сечении отраженный скачок попадает на границу струи, то при переходе из одной области в другую имеет место скачок давления, который виден при $\xi=1$ на рис. 3.7.

В исследованном диапазоне параметров профиль давления во внешнем потоке относительно слабо зависит от M_∞ и степени нерасчетности, причем более заметное влияние этих параметров наблюдается в окрестности головной ударной волны. Внутри струи в этом сечении при $n=10^2$ с увеличением M_∞ с 3 до 10 давление уменьшается в 3,5 ... 4 раза и приближается к статическому давлению в невозмущенном спутном потоке.

Отраженный скачок при падении на границу струи преломляется и переходит в область внешнего течения, а внутрь струи отражается возмущение, которое может быть либо волной разрежения, либо ударной волной. Анализ взаимодействия отраженного скачка с границей струи показывает, что при $M_\infty=3$, когда давление за отраженным скачком в несколько раз больше давления в невозмущенном спутном потоке, внутрь струи отражается волна разрежения (как и при $M_\infty=0$) и образуется новая бочка струи. При $M_\infty=10$, когда давление за отраженным скачком практически равно p_∞, отраженное внутрь струи возмущение практически отсутствует. Следовательно, в этом случае струя распространяется дальше как изобарическая.

Анализ влияния степени нерасчетности на распределения давления в конце начального участка струи (рис. 3.8, сплошные кривые) показывает, что при увеличении n от 10^2 до 10^7 значения p/p_∞ внутри струи возрастают примерно втрое. Увеличение давления в струе при уменьшении M_∞ и увеличении n обусловлено характером изменения формы струи, а именно увеличением поджатия струи в конце начального участка. Важно отметить, что независимо от степени нерасчетности практически весь огромный перепад давлений между выходом сопла и окружающей средой «срабатывается» в пределах начального участка струи. Пунктирные кривые на рис. 3.8 показывают влияние степени нерасчетности на распределение давления в области спутного потока.

На рис. 3.9 сплошными линиями показаны распределения относительной температуры T/T_a в конечном сечении начального участка в области струи, а пунктирными линиями — распределения относительной температуры T/T_∞ в области спутного потока в том же сечении при различных числах M_∞. В пределах начального участка, если не учитывать вязкость и теплопроводность, газ струи заметно охлаждается, поскольку основная масса струи, текущая вблизи границы, имеет температуру более низкую, чем газ на срезе сопла. Увеличение температуры вблизи оси струи обусловлено образованием энтропийного слоя из-за увеличения интенсивности висячего скачка в непосредственной окрестности точки отражения.

В спутном потоке вблизи границы струи также образуется энтропийный слой, вызывающий увеличение температуры в этой области при больших степенях нерасчетности и больших числах M_∞.

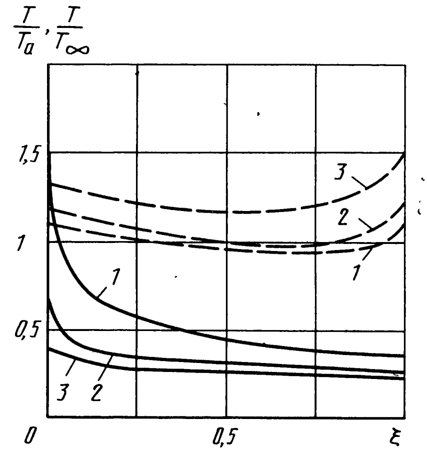


Рис. 3.9. Поперечные профили температуры в конце начального участка при различных M_∞ (условные обозначения, как на рис. 3.7)

3.1.2. Автомодельные свойства

Рассмотрим условия подобия сильно недорасширенных струй газа, вытекающих в спутный сверхзвуковой поток, в гиперзвуковом приближении, следуя единому подходу, использованному в подразд. 2.1.3 для анализа подобия затопленных неизобарических струй. Дополнительно к соотношениям (2.16) используем оценки для параметров течения в сжатом слое спутного потока.

$$u \sim (1+\tau^2)W_\infty,\quad v \sim \tau W_\infty,\quad p \sim \tau^2 \varrho_\infty W_\infty^2,\quad \varrho \sim \varrho_\infty. \tag{3.2}$$

Поскольку в сжатом слое струи давление имеет порядок давления на границе, а характерная плотность перед висячим скачком $\varrho_1 \sim \varrho_a\left(\frac{Y}{r_a}\right)^{-2} \sim \varrho_a\left(\frac{X}{r_a}\tau\right)^{-2}$, то можно положить

$$\tau^2 \varrho_\infty W_\infty^2 \sim \varrho_1 W_a^2 \tau^2 \sim \varrho_a W_a^2 \left(\frac{X}{r_a}\right)^{-2}.$$

Отсюда

$$X/r_a \sim \left(\frac{\varrho_a}{\varrho_\infty}\right)^{0,5} \frac{W_a}{W_\infty \tau} = \left(\frac{\gamma_a}{\gamma_\infty} n\right)^{0,5} \frac{M_a}{M_\infty \tau} \tag{3.3}$$

и соответственно

$$Y/r_a \sim \tau X/r_a \sim \left(\frac{\gamma_a}{\gamma_\infty} n\right)^{0,5} \frac{M_a}{M_\infty}. \tag{3.4}$$

Введем новые безразмерные координаты, отмеченные штрихом,

$$x = x'\left(\frac{\gamma_a}{\gamma_\infty} n\right)^{0,5} \frac{M_a}{M_\infty}\tau^{-1} r_a,\quad y = y'\left(\frac{\gamma_a}{\gamma_\infty} n\right)^{0,5} \frac{M_a}{M_\infty} r_a \tag{3.5}$$

и новые безразмерные функции для спутного потока

$$u=(1+\tau^2u')W_\infty,\ v=\tau v'W_\infty,\ p=\tau^2p^1\varrho_\infty W_\infty^2,\ \varrho=\varrho'\varrho_\infty \qquad (3.6)$$

и для струи

$$u=(1+\tau^2u')W_a,\ v=\tau v'W_a,\ p=\tau^2p'\varrho_\infty W_\infty^2,$$

$$\varrho=\varrho'\frac{\varrho_\infty W_\infty^2}{W_a^2}. \qquad (3.7)$$

Если пренебречь в дифференциальных уравнениях и соотношениях для скачка уплотнения членами порядка τ^2 по сравнению с единицей, то они будут содержать в качестве параметров только γ_a и γ_∞.

Рассмотрим граничные условия перед висячим скачком струи

$$\varrho'=A(\gamma_a)\left(\frac{x'}{M_a\tau}\right)^{-2}f\left(\gamma_a,\frac{y'}{x'}M_a\tau\right),\ u'=0,\ v'=y'/x', \qquad (3.8)$$

$$p'=(\varrho')^{\gamma_a}\frac{1}{\gamma_\infty K^2}\left(\frac{\gamma_\infty K^2}{\gamma_a M_a^2\tau^2}\right)^{\gamma_a}n^{1-\gamma_a},$$

где $K=M_\infty\tau$ — гиперзвуковой параметр подобия при обтекании тонких тел.

Перед головным скачком уплотнения в спутном потоке имеем:

$$\varrho'=1,\ p'=1/\gamma_\infty K^2,\ u'=0,\ v'=0. \qquad (3.9)$$

Как и в случае недорасширенной затопленной струи, можно принять $\tau=M_a^{-1}$. Тогда из соотношений (3.8) и (3.9) следует, что критерием подобия наряду с γ_a и γ_∞ будет также величина $K=M_\infty/M_a$. Заметим, что согласно соотношению для p' в выражении (3.8) решение в выбранных безразмерных переменных должно зависеть и от n. Однако при $n\gg1$ можно положить $p'=0$ и степень нерасчетности исключается из числа критериев подобия.

Появление критерия подобия $K=M_\infty\tau$ в случае истечения струи в спутный поток легко объяснить следующим образом. Если две струи являются автомодельными, то, следовательно, автомодельны и распределения статического давления вдоль границ струи. А поскольку границу гиперзвуковой струи можно рассматривать как контур некоторого тонкого тела, то условием автомодельности течения во внешней области, а следовательно, и распределения давления вдоль границы струи является $K=M_\infty\tau=\text{const}$.

На рис. 3.10 показана форма начального участка в координатах подобия при различных числах M_a и M_∞, но при $K=M_a/$ $/M_\infty=\text{const}$. Видно, что с увеличением чисел M_a и M_∞ форма струи приближается к автомодельной. В данном конкретном случае гиперзвуковой режим наступает при $M_a\geqslant5$. Заметим также, что автомодельность формы головной ударной волны в спутном потоке, а приближенно и границы струи наблюдается и при числе $M_a=3$.

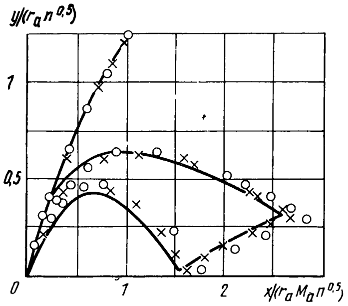


Рис 3.10. Форма спутных струй в координатах подобия при $M_\infty/M_a=2$ ($n=10^3$; $\gamma_a=\gamma_\infty=1{,}4$; $\theta_a=0$): —— $M_a=10$; x — $M_a=5$, o — $M_a=3{,}1$

Параметр τ характеризует относительную толщину струи. Зависимость $\tau=M_a^{-1}$ правильно отражает влияние числа Маха сопла на относительную толщину струи, но не учитывает влияние отношения удельных теплоемкостей газа струи и сопла θ_a.

Определим τ, используя оценку характерного угла расширения в виде (2.18)

$$\tau=\left[\frac{1}{\gamma_a(\gamma_a-1)}+\frac{1}{4}(M_a\theta_a)^2\right]^{1/2} M_a^{-1}. \qquad (3.10)$$

Если $\theta_a\neq 0$, то, как и в случае затопленной недорасширенной струи, в число критериев подобия должен войти параметр $M_a\theta_a$. Однако результаты численных расчетов показывают, что в случае истечения струи в спутный поток влияние этого параметра незначительно, по крайней мере, при $M_a\theta_a<1$.

На рис 3.11, 3.12 по результатам численных расчетов приведены значения различных продольных и поперечных размеров начального участка в зависимости от параметра подобия $K=M_\infty\tau$, где τ определено из соотношения (3.10). Здесь приняты следующие обозначения размеров начального участка: X_S — расстояние до точки отражения висячего скачка; X_l — длина начального участка; Y_{mS}, Y — максимальные радиусы висячего скачка и границы струи соответственно; Y_{bS}, Y_{bl} — радиусы ударной волны в спутном потоке при $x=X_S$ и $x=X_l$ соответственно.

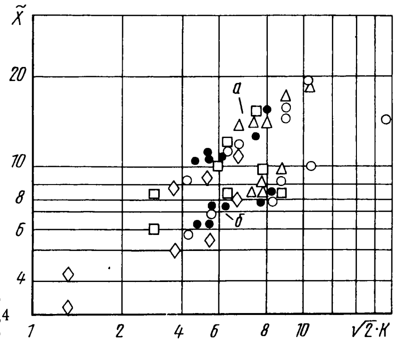


Рис. 3.11. Зависимости характерных продольных размеров от параметра гиперзвукового подобия:
а — $X=X_l/X_*$, б — $\bar{X}=X_S/X_*$

	◇	●	○	△	□
n	10^2	10^3	10^4	10^5	10^7
M_a	4 .. 5	3 . . 5	4	4 . 5	4 . 5
M_∞	3 ... 10	6 ... 8	10	10 . . 15	6 . 15
γ_a	1,4	1,3 . 1,4	1,05 .. 1,67	1,3 . 1,4	1,3 1,4
θ_a, °	0 .. 10	0 ... 15	10	10 ... 15	5 . 15

Продольные размеры отнесены к X_*, а поперечные — к Y_*, где

$$Y_*=\left(\frac{\gamma_a}{\gamma_\infty}n\right)^{0,5}\frac{M_a}{M_\infty}r_a;\; X_*=\frac{Y_*}{\sqrt{2}\,\tau}. \tag{3.11}$$

Для всех вариантов расчетов $\gamma_\infty=1,4$.

На рисунках видно, что при $\gamma_\infty=\text{const}$ основным критерием подобия является гиперзвуковой параметр K. Влияние γ_a является довольно слабым. Хотя в соответствии с проведенным анализом γ_a входит формально в число критериев подобия, зависимость геометрии начального участка от γ_a, по-видимому, достаточно полно учитывается его присутствием в выражениях для X, Y.

Автомодельность распределений параметров иллюстрирует рис. 3.13. Здесь приведены распределения давления в сходственных сечениях вблизи точки отражения висячего скачка для двух вариантов расчета [52] с одинаковыми значениями параметра гиперзвукового подобия $K=3{,}98$.

Распределения давления приведены в виде p/p_∞, эквивалентном $p/\varrho_\infty W_\infty^2\tau^2$ (см. соотношения (3.6), (3.7) при $\gamma_\infty=\text{const}$ и $K=\text{const}$). Видно удовлетворительное подобие профилей p/p_∞ при $K=\text{const}$.

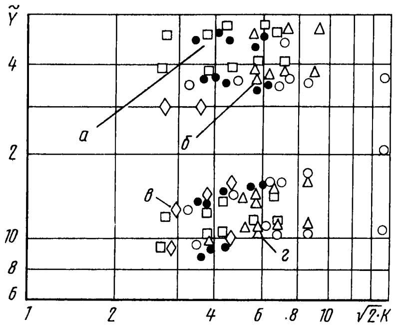


Рис. 3.12. Зависимости характерных поперечных размеров от параметра гиперзвукового подобия: $а$ — $\tilde{Y}=Y_{bS}/Y_*$; $б$ — $\tilde{Y}=Y_{pS}/Y_*$, $в$ — $\tilde{Y}=Y/Y_*$, $г$ — $Y=Y_{mS}/Y$ (остальные обозначения как на рис. 3.11)

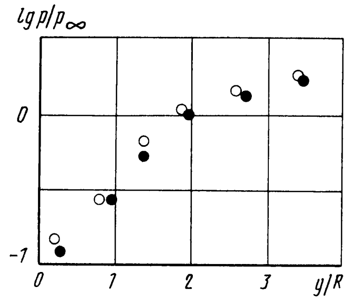


Рис. 3.13. Подобие профилей давления в сходственных сечениях струй при $K=\text{const}$

	M_a	n	γ_a	$\theta°$	M_∞	x/X_*
●	4	10^5	1,3	10	10	7,9
○	4	10^5	1,4	10	12	7,81

Подобие профилей других газодинамических параметров выполняется примерно с той же точностью, что и для профилей статического давления. Это не относится к поведению таких параметров, как плотность, температура в узком низкоэнтропийном слое вблизи границы струи. Существование такого слоя исключает подобие профилей этих величин по степени нерасчетности, поскольку плотность и температура газа вблизи границы струи и за висячим скачком уплотнения зависят от степени нерасчетности по различным законам, как и в случае истечения в затопленное пространство (см. подразд. 2.1.3).

Ранее отмечалось, что степень нерасчетности исключается из числа самостоятельных критериев подобия при $n \gg 1$ в силу выражения для p' в соотношениях (3.8). Сравним формулу (3.8) с аналогичным выражением (2.17) для затопленной струи. Поскольку $M_a\tau \sim 1$, то можно сказать, что автомодельность струй по степени нерасчетности при наличии сверхзвукового спутного потока должна наступать при степени нерасчетности по меньшей мере в $K^{2\gamma_a/(\gamma_a-1)}$ раз более высокой, чем в случае затопленной струи.

В работе [12] для анализа подобия гиперзвуковых струй в гиперзвуковом спутном потоке использовался тот же подход, что и в случае затопленной струи [37]. Для характерных размеров струи получены выражения

$$Y_* = \left(\frac{G_a W_{\max}}{\pi \varrho_\infty W_\infty^2} \right)^{1/2}; \quad X_* = \tau^{-1} Y_*,$$

где τ — относительная толщина струи, как и при истечении в затопленное пространство, принята равной $\tau = (1 - \bar{J}_1)^{0,5}$. Для сопла с равномерным потоком на выходе $\bar{J}_1$ определяется выражением (2.21) и соответственно τ равно (при $M_a \gg 1$)

$$\tau = \left[\frac{1}{\gamma_a(\gamma_a - 1)} \right]^{1/2} M_a^{-1}$$

Это выражение совпадает с соотношением (3.10) (при $\theta_a = 0$). Формула для Y_* имеет вид

$$Y_* = \left(\frac{\gamma_a}{\gamma_\infty} n \right)^{0,5} \frac{M_a}{M_\infty} \left[1 + \frac{2}{(\gamma_a - 1) M_a^2} \right]^{0,25} r_a.$$

При $(\gamma_a - 1) M_a^2 \gg 1$ она совпадает с соотношением (3.11).

Проведенная в работе [12] обработка результатов численных расчетов [52] показала, что геометрия течения и профили газодинамических величин в выбранных переменных слабо зависят от определяющих параметров. Однако в работе [12] при обработке численных результатов рассматривалась лишь ближняя к соплу часть начального участка струи примерно до сечения, где диаметр висячего скачка максимален. Для начального участка в целом подобия независимо от определяющих параметров не наблюдается. Например, из рис. 3.11 следует, что расстояние до точки отражения висячего скачка от оси струи, нормированное по $\bar{X}$, зависит от гиперзвукового параметра K. В то же время максимальный размер висячего скачка при $K \geqslant 3 \ldots 3{,}5$ изменяется слабо (в работе [12] обработаны результаты численных расчетов, соответствующие значениям K в диапазоне $4 \ldots 9$).

Приближенную автомодельность геометрии и распределений газодинамических величин в ближней области струи независимо от гиперзвукового параметра K можно объяснить следующим образом. Параметр K присутствует в условиях (3.8), (3.9). Приближенная независимость от этого критерия может иметь место в той области струи, где в условиях (3.9) можно положить $p'=0$, т. е. пренебречь величиной давления p_∞ в набегающем потоке по сравнению с давлением в сжатом слое. Это справедливо для ближней области струи, где давление за головным скачком значительно превышает давление в набегающем потоке, особенно при больших K.

Однако при удалении от среза сопла давление на границе струи падает и становится сравнимым с p_∞ в области максимального сечения струи. Здесь уже нельзя в соотношении (3.9) положить $p'=0$, и структура течения в дальней области начального участка может быть автомодельной лишь при условии $K=\text{const}$.

3.1.3. Применение метода нестационарной аналогии к описанию истечения недорасширенной струи в спутный сверхзвуковой поток

В отличие от случая истечения струи в затопленное пространство применение метода нестационарной аналогии к истечению струи в спутный сверхзвуковой поток требует совместного рассмотрения движений газа в двух областях (см. рис. 3.14): в области собственно струи (область *I*—*II*, ограниченная границей $y_2(x)$ контактного разрыва) и в области сжатого газа спутного потока между границей струи $y_2(x)$ и головной ударной волной $y_3(x)$ (область *III*).

Для математического обоснования метода будем исходить из интегральных уравнений сохранения массы и количества дви-

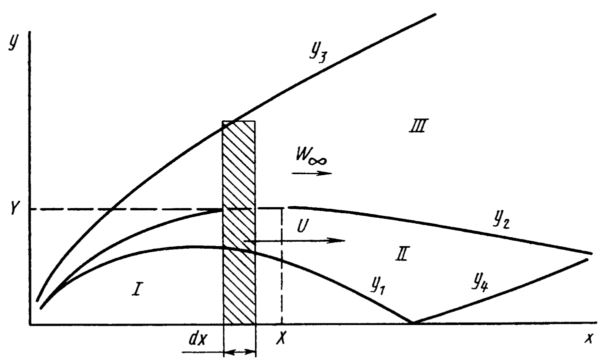


Рис. 3.14. Схема метода плоских сечений для истечения недорасширенной струи в спутный сверхзвуковой поток

жения в проекции на ось x для областей I и II. В пренебрежении эффектами вязкости имеем:

для области $I—II$

$$\varrho_a W_a \pi r_a^2 = 2\pi \int_0^{y_2} \varrho u y dy; \qquad (3.12)$$

$$(p_a + \varrho_a W_a^2)\pi r_a^2 + 2\pi \int_{r_a}^{y_2} p_2 y_2 dy_2 = 2\pi \int_0^{y_2} (p + \varrho u^2) y dy; \qquad (3.13)$$

для области III

$$\varrho_\infty W_\infty \pi y_3^2 = 2\pi \int_{y_2}^{y_3} \varrho u y dy; \qquad (3.14)$$

$$(p_\infty + \varrho_\infty W_\infty^2)\pi y_3^2 = 2\pi \int_{r_a}^{y_2} p_2 y_2 dy_2 + 2\pi \int_{y_2}^{y_3} (p + \varrho u^2) y dy. \qquad (3.15)$$

Как и в случае истечения в затопленное пространство, уравнение (3.13) с учетом уравнения (3.12) и интеграла Бернулли после упрощений, связанных с предположением о том, что весь газ струи сосредоточен вблизи границы y_2 и после замены величины радиальной скорости газа v_2 вблизи границы на величину $dy_2/dt = U dy_2/dx$ приводится к виду

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dy_2}{dx}\right)^2 + \frac{2\pi p_\infty}{G_a U}\int_{r_a}^{y_2} \frac{p_2}{p_\infty} y_2 dy_2 = \frac{e_a}{U^2}\left(1 - \frac{e_2}{e_a}\right). \qquad (3.16)$$

Для внутренней энергии газа вблизи границы примем следующую оценку, соответствующую изоэнтропийному расширению:

$$\chi = 1 - \frac{e_2}{e_a} = 1 - \left(\frac{p_2}{p_a}\right)^{\frac{\gamma_a - 1}{\gamma_a}} = 1 - \left(\frac{p_2}{p_\infty}\cdot\frac{1}{n}\right)^{\frac{\gamma_a - 1}{\gamma_a}}. \qquad (3.17)$$

Наличие в уравнении (3.16) параметра χ обусловливает отклонение от автомодельности течения по n. Как следует из результатов численных расчетов [52], при $n > 10$ такие отклонения невелики. Поэтому в целях упрощения в дальнейшем χ будем оценивать в сечении струи с максимальным радиусом, где $p_2 \sim p_\infty$, т. е. приближенно положим

$$\chi = 1 - n^{(1-\gamma_a)/\gamma_a} \qquad (3.18)$$

При использовании обозначений

$$\omega^2 = 2\pi p_\infty / (G_a U)$$

и

$$\theta^2 = e_a \chi / U^2 = [(\gamma_a - 1)(\gamma_a M_a^2 + 2)]^{-1} \chi, \qquad (3.19)$$

определяющих соответственно масштабы частоты колебательных движений газа в радиальном направлении и характерного угла расширения струи, получаем

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dy_2}{dx}\right)^2+\omega^2\int\limits_{r_a}^{y_2}\frac{p_2}{p_\infty}y_2dy_2=\theta^2, \tag{3.20}$$

а после дифференцирования последнего по x приходим к уравнению второго порядка

$$\frac{d^2y_2}{dx^2}+\omega^2\frac{p_2(x)}{p_\infty}y_2=0. \tag{3.21}$$

Положительный знак величины $\omega^2p_2(x)/p_\infty$ указывает, что функция $y_2(x)$ имеет осцилляционный характер.

В отличие от рассмотренного в подразд. 2.14 истечения струи в затопленное пространство в уравнении (3.21) давление p_2 вдоль границы y_2 является переменным и заранее неизвестно. Оно должно определяться при рассмотрении движения газа в области *III*.

В качестве первого приближения зададимся распределением по формуле Ньютона

$$p_2(x)=\varrho_\infty W_\infty^2\sin^2\alpha_2(x)+p_\infty,$$

где $\alpha_2(x)$ — угол наклона $y_2(x)$ к направлению невозмущенного спутного потока.

В рамках предположений нестационарной аналогии $\sin\alpha_2\approx\operatorname{tg}\alpha_2=dy_2/dx$, что выполняется в большей части начального участка за исключением присопловой области последнего. При этом имеем

$$p_2(x)/p_\infty=1+\gamma_\infty M_\infty^2(dy_2/dx)^2, \tag{3.22}$$

а уравнение (3.21) принимает вид

$$d^2y_2/dx^2+\omega^2\left[1+\gamma_\infty M_\infty^2(dy_2/dx)^2\right]y_2=0. \tag{3.23}$$

Может показаться, что это уравнение является чересчур грубым и даже совсем неверным приближением на близких расстояниях от среза сопла для больших степеней нерасчетности n истечения, при которых наклон границы струи к оси x может быть достаточно большим. Можно дать другой вывод уравнения (3.23) и показать, что оно является вполне удовлетворительным для достаточно больших α_2 нежели для малых, при которых закон Ньютона выполняется плохо [35].

Будем исходить из уравнения движения в проекции на нормаль n к линиям тока

$$\frac{\varrho W^2}{R}=-\frac{\partial p}{\partial n}. \tag{3.24}$$

Здесь W — полная скорость; R — радиус кривизны линий тока.

Умножим обе части уравнения (3.24) на $2\pi ydn$ и проинтегрируем его по переменной $\bar{n}$ от оси струи до границы струи. Полагая далее в соответствии со схемой тонкого сжатого слоя, что весь газ сосредоточен вблизи границы $y_2(x)$, найдем

$$W_2G_a/R_2+2\pi p_2y_2=0, \tag{3.25}$$

где R_2 — радиус кривизны границы,

$$W_2 \approx W_{max} \approx U\sqrt{1+(dy_2/dx)^2} — \tag{3.26}$$

скорость газа вблизи нее. Подставив в уравнение (3.25) выражение для радиуса кривизны

$$R_2(x)=(d^2y_2/dx^2)/\left[1+(dy_2/dx)^2\right]^{3/2}$$

формулу Ньютона в виде

$$\frac{p_2}{p_\infty}=1+\gamma_\infty M_\infty^2 \sin^2\alpha=1+\frac{\gamma_\infty M_\infty^2 y_2^{\cdot 2}}{(1+y_2^{\cdot 2})}, \tag{3.27}$$

а также соотношение (3.26), найдем

$$d^2y_2/dx^2+\frac{2\pi p_\infty}{G_a U}\left[1+(1+\gamma_\infty M_\infty^2)\left(\frac{dy_2}{dx}\right)^2\right]y_2=0, \tag{3.28}$$

что при $M_\infty^2 \gg 1$ и $x \sim X$ практически совпадает с уравнением (3.23).

На основании анализа получаемых конечных результатов можно также заметить, что свойственное методу нестационарной аналогии неизбежное загрубление реальных особенностей течения в присопловом участке струи сказывается слабо на характерных поперечном X и продольном Y размерах начального участка, а также на форме струи и ударных волн на расстояниях от сопла, сравнимых с X. Физическое объяснение этого фактора состоит, по-видимому, в том, что в реальной струе расход газа вблизи границы струи на достаточно малых расстояниях от сопла еще сравнительно мал, так что различные возмущающие факторы должны слабо сказываться на геометрических характеристиках начального участка и, следовательно, на распределении давления в большей его части.

Конечное аналитическое решение уравнения (3.23) получить не удается. Однако его анализ позволяет получить ряд интересных результатов. Так, совершив одну квадратуру, имеем

$$1+\gamma_\infty M_\infty^2\left(\frac{dy_2}{dx}\right)^2=c\gamma_\infty M_\infty^2 \exp(-\omega^2\gamma_\infty M_\infty^2 y_2^2) \tag{3.29}$$

или, в соответствии с соотношением (3.27),

$$p_2/p_\infty=c\gamma_\infty M_\infty^2 \exp(-\omega^2\gamma_\infty M_\infty^2 y_2^2). \tag{3.30}$$

Для определения постоянной c подставляем соотношение (3.26) в уравнение

$$\omega^2\int_{r_a}^{Y}\frac{p_2}{p_\infty}y_2 dy_2=\theta^2, \tag{3.31}$$

представляющее собой уравнение (3.20), записанное для сечения струи $x=X$ с максимальным радиусом $y_2=Y$, для которого $(dy_2/dx)_{x=X}=0$.
Получаем

$$c=2\theta^2\left\{\exp(-\omega^2\gamma_\infty M^2 r_a^2)-\exp(-\omega^2\gamma_\infty M_\infty^2 Y^2)\right\} \tag{3.32}$$

Подставив последнее соотношение в формулу (3.26), находим

$$1+\gamma_\infty M_\infty^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{2\gamma_\infty M_\infty^2\theta^2\exp\left\{\omega^2\gamma_a M_\infty^2(Y^2-y_2^2)\right\}}{\exp\left\{\omega^2\gamma_\infty M_\infty^2(Y^2-r_a^2)\right\}-1} \tag{3.33}$$

Из этого соотношения можно получить явное выражене для максимального радиуса Y начального участка струи, подставляя сюда значения $y_2=Y$, $(dy_2/dx)|_{x=X}=0$. Имеем

$$Y^2-r_a^2=\ln[1+2\gamma_\infty K^2]/(\omega^2\gamma_\infty M_\infty^2), \tag{3.34}$$

а после преобразований, использующих обозначения (2.57),

$$Y^2-r_a^2=\frac{\theta^2L^2}{2\gamma_\infty K^2}\ln(1+2\gamma_\infty K^2), \tag{3.35}$$

где $K=M_\infty\theta$ — параметр гиперзвукового подобия, а U, как и ранее (см. (2.55)), равно $[1+2/(\gamma_a M_a^2)]^{1/2}W_a$.

Если параметр ω^2 не выражать через параметры M_a и n, а сохранить в правой части комплекс G_aU, представляющий собой достаточно точную оценку тяги сопла, и кроме того учесть соотношение $p_\infty\gamma_\infty M_\infty^2=\varrho_\infty W_\infty^2$, то можно получить формулу для площади $S=\pi Y^2$ миделя струи в виде

$$S_m-S_a=\frac{G_aU}{2\varrho_\infty W_\infty^2}\ln(1+2\gamma_\infty K^2) \tag{3.36}$$

($S_a=\pi r_a^2$ — площадь среза сопла), показывающую, что величина S_m пропорциональна тяге и обратно пропорциональна скоростному напору спутного потока. Формулы (3.34) . . . (3.36) для максимального радиуса Y струи с точностью до 15% согласуются со всеми вариантами численных расчетов, приведенных в работе [52]. Эти формулы также дают при $M_\infty\to0$ предел

$$\lim_{M_\infty\to0}\left(\frac{Y}{r_a}\right)^2=1+\theta^2L^2=1+\frac{n\chi}{\gamma_a-1}\frac{W_a}{U},$$

с такой же точностью согласующийся с численными расчетами для истечения струи в затопленное пространство.

Можно также получить конечную зависимость для распределения давления p_2 вдоль границы от ее координаты y_2. Для этого подставим найденное выражение (3.32) для c в правую часть соотношения (3.30). После преобразования находим

$$p_2/p_\infty=(1+2\gamma_\infty K^2)\exp\left[\omega^2\gamma_\infty M_\infty^2(r_a^2-y_2^2)\right] \tag{3.37}$$

или

$$\ln\frac{p_2/p_\infty}{(1+2\gamma_\infty K^2)}=2\frac{\gamma_\infty M_\infty^2}{\gamma_a M_a^2}\frac{W_a}{U}\frac{r_a^2-y_2^2}{nr_a^2}. \tag{3.38}$$

Сравнение расчетов распределения давления по выражению (3.37) или (3.38) с соответствующими численными расчетами указывает на их вполне удовлетворительное количественное и качественное соответствие в области до максимального сечения $x\sim X$. Можно также отметить, что для присоплового участка, несмотря на указанное ранее загрубление метода нестационарной аналогии, получаем правильную качественную зависимость от определяющих параметров

$$\lim_{y_2\to r_2}(p_2/p_\infty)=1+2\gamma_\infty K^2$$

Выражения (3.38) и (3.34) можно также привести к следующей форме

$$\frac{\ln(p_2/p_\infty)}{\ln(1+2\gamma_\infty K^2)}=1-\frac{y_2^2-r_a^2}{Y^2-r_a^2}, \tag{3.39}$$

которая оказывается очень удобной для обработки и обобщения расчетных и экспериментальных данных.

Как уже отмечалось, формула Ньютона дает неудовлетворительные результаты при малых углах наклона обтекаемой поверхности, поэтому даже в случае возможности решения уравнения (3.23) (например, численным методом) следует отметить, что форма границы струи в области $x \sim X$ и само значение X будут предсказываться неправильно. Поэтому для описания области начального участка, удаленной от сопла на расстояние порядка X, рассмотрим течение газа спутного потока в сжатом слое между границей струи y_2 и ударной волной y_3. Основной целью этого рассмотрения будет являться нахождение более адекватного выражения для распределения давления вдоль границы струи.

Преобразуем уравнение количества движения (3.15) для области *III* аналогично тому, как это было сделано с уравнением (3.13) и проведено в работе [35] при анализе обтекания тонкого тела гиперзвуковым потоком. Используем уравнение сохранения массы (3.14), уравнение Бернулли

$$H_\infty = e_\infty + p_\infty/\varrho_\infty + W_\infty^2/2 = e + p/\varrho + u^2/2 + v^2/2$$

и предположение о том, что вся масса газа сжатого слоя сосредоточена непосредственно за головной ударной волной и движется в направлении оси x со средней скоростью $\bar{u} = W_\infty [1 + (Y/X)^2]^{-1} \approx \approx W_\infty$. Положим далее $\bar{u} = W_\infty$. В результате

$$\left(e_3 + \frac{v_3^2}{2}\right) \varrho_\infty \pi y_3^2 = 2\pi \int_{r_a}^{y_2} p_2 y_2 dy_2 + \varrho_\infty e_\infty \pi y_3^2 + J_1. \tag{3.40}$$

Здесь $e_\infty = c_{v\infty} T_\infty$ и $e_3 = c_{v\infty} T_3$ — значения внутренней энергии газа в невозмущенном потоке и за ударной волной, а v_3 — радиальная компонента скорости газа за ударной волной. Третий член в правой части (3.40) имеет вид

$$J_1 = 2\pi \int_{y_2}^{y_3} \varrho \left[h \frac{W_\infty - u}{W_\infty} + \frac{(W_\infty - u)^2}{2} \right] y dy.$$

Его оценочная величина

$$J_1 \approx \left(\frac{W_\infty}{\bar{u}} - 1 \right) \left(H_\infty - \frac{W_\infty u}{2} \right) \varrho_\infty \pi y_3^2$$

мала и ею в дальнейшем пренебрегаем.

В такой записи уравнение (3.40) можно интерпретировать как закон сохранения энергии газа в плоском слое единичной ширины при воздействии в радиальном направлении на этот слой эквивалентного цилиндрического поршня, совершающего работу

$$E = 2\pi \int_{r_a}^{y_2} p_2 y_2 dy_2. \tag{3.41}$$

Численно величина E равна силе сопротивления спутному потоку, создаваемой участком поверхности струи от среза сопла до рассматриваемого сечения. Отметим также наличие такой же по величине работы в уравнении (3.16), выражающем закон сохранения энергии в плоском слое газа струи.

Величины вертикальной составляющей скорости v_3 и энергии e_3 за ударной волной выразим с помощью соотношений Гюгонио через скорость ударной волны dy_3/dt в радиальном направлении и соответствующие параметры в невозмущенном газе. Имеем

$$v_3^2 = \frac{4}{(\gamma_\infty+1)^2}\left(\frac{dy_3}{dt}\right)^2 - \frac{8a_\infty^2}{(\gamma_\infty+1)^2} - \frac{4a_\infty^2}{(\gamma_a+1)^2} \Big/ \left(\frac{dy_3}{dt}\right)^2; \tag{3.42}$$

$$\frac{e_3}{e_\infty} = \frac{T_3}{T_\infty} = \frac{4\gamma_\infty}{(\gamma_\infty+1)^2} + \frac{2\gamma_\infty(\gamma_\infty-1)}{(\gamma_\infty+1)^2 a_\infty^2}\left(\frac{dy_3}{dt}\right)^2 -$$

$$- \frac{(\gamma_\infty-1)^2}{4\gamma_\infty} - \frac{(\gamma_a-1)}{2\gamma_\infty} \Big/ \left(\frac{dy_3}{dt}\right)^2. \tag{3.43}$$

Будем пренебрегать третьим членом в выражении для v_3^3, а также третьим и четвертым членами — в выражении для e_3. После подстановки последних в уравнение (3.40), перехода от времени t к переменной x по соотношению $t = x/W_\infty$, а также ряда преобразований получаем уравнение

$$\left(\frac{dy_3^2}{dx}\right)^2 - By_3^2 = A, \tag{3.44}$$

где

$$A = \frac{(\gamma_\infty+1)^2}{\pi p_\infty \gamma_\infty M_\infty^2} E; \tag{3.45}$$

$$B = \frac{5\gamma_\infty - 1}{\gamma_\infty M_\infty^2}. \tag{3.46}$$

С учетом выражения (3.41) для работы E можно видеть, что уравнение (3.40) содержит три неизвестные функции: $y_2(x)$, $y_3(x)$ и $p_2(x)$. Для замыкания задачи необходимы еще два уравнения. В качестве первого может быть взято уравнение (3.21), содержащее неизвестные $y_2(x)$ и $p_2(x)$. Недостающее уравнение получим, рассмотрев радиальное движение внутри плоского цилиндрического слоя единичной ширины, ограниченного поверхностями $y_2(x)$ и $y_3(x)$ и, следовательно, содержащего массу газа $w = \varrho_\infty \pi y_3^2$.

Уравнение движения в проекции на радиальное направление y

$$\varrho\frac{dv}{dt}=\varrho\frac{\partial v}{\partial t}+\varrho v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y} \tag{3.47}$$

в предположении о том, что вся масса газа спутного потока сосредоточена вблизи ударной волны y_3 может быть преобразовано к виду

$$\frac{\varrho_\infty y_3}{2}\frac{dv_3}{dt}=p_3-p_2. \tag{3.48}$$

Этот результат также может быть получен из следующих элементарных рассуждений.

При плотности, соответствующей величине плотности ϱ_3 за ударной волной, толщина Δy_3 слоя газа единичной ширины, сосредотачивающем в себе всю массу газа, по закону сохранения массы равна

$$\Delta y_3=m/(2\pi\varrho_3 y_3)=\varrho_\infty y_3/(2\varrho_3).$$

Так как на этой толщине и должно происходить падение располагаемого перепада давлений p_3-p_2. то для градиента давления $\partial p/\partial y$ имеем

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{p_3-p_2}{\Delta y_3}=\frac{2\varrho_3}{\varrho_\infty y_3}(p_3-p_2). \tag{3.49}$$

Подставив в левую часть уравнения (3.47) значения плотности и скорости за ударной волной $\varrho=\varrho_3$, $v=v_3$, а в правую часть — равенство (3.49), получим уравнение (3.48).

Выразив теперь величину v_3 через скорость ударной волны dy_3/dt соотношением

$$v_3=\frac{2}{\gamma_\infty+1}\frac{dy_3}{dt}$$

и перейдя от времени t к переменной $x=W_\infty t$, получим искомое третье уравнение системы в следующем виде

$$p_2-p_3=\frac{p_\infty\gamma_\infty M_\infty^2}{\gamma_\infty+1}y_3\frac{d^2y_3}{dx^2}$$

или с учетом соотношения

$$\frac{p_3}{p_\infty}=\frac{2}{(\gamma_\infty+1)}\left(\frac{dy_3}{dt}\right)^2=\frac{2\gamma_\infty M_\infty^2}{(\gamma_\infty+1)}\left(\frac{dy_3}{dx}\right)^2-\frac{\gamma_\infty-1}{\gamma_\infty+1} \tag{3.50}$$

в виде

$$\frac{p_2}{p_\infty}=\frac{\gamma_\infty M_\infty^2}{(\gamma_\infty+1)}2\left[\left(\frac{dy_3}{dx}\right)^2-y_3\frac{d^2y_3}{dx^2}\right]. \tag{3.51}$$

Система трех уравнений (3.21), (3.44) и (3.51) в принципе позволяет определить функции $y_2(x)$, $y_3(x)$ и $p_2(x)$. Однако аналитическое решение этой системы в таком виде получить нельзя, в частности, ввиду того, что в уравнении (3.44) величина энергии E, сообщаемой газу от движущегося эквивалентного поршня, выражается в виде интеграла (3.41) от искомых $y_2(x)$ и $p_2(x)$. Последнее выражение можно, однако, упростить, если схему движения газа под действием цилиндрического поршня приближенно заменить схемой мгновенного взрыва [35, 65] бесконечно тонкого цилиндрического заряда, расположенного вдоль оси x. В качестве величины мгновенно выделившейся при $t=0$ энергии примем работу цилиндрического поршня при его максимальном расширении

$$E_m=2\pi\int_{r_a}^{Y} p_2(x) y_2 dy_2.$$

Таким образом, энергия взрыва E_m полагается численно равной величине силы сопротивления, оказываемой истекающей струей спутному потоку. При этом сильно недорасширенная струя выполняет роль некоторого эквивалентного затупления, обтекаемого сверхзвуковым потоком.

В соответствии с соотношением (3.31), выражающим закон сохранения энергии в плоском слое газа струи,

$$E_m=G_a U\theta^2=\text{const}.$$

и для коэффициента A, фигурирующего в уравнении (3.44), имеем

$$A=\frac{(\gamma_\infty+1)^2}{\pi p_\infty \gamma_\infty M_\infty^2} G_a U\theta^2=\text{const}. \tag{3.52}$$

Уравнение (3.44) теперь содержит только одну неизвестную функцию $y_3(x)$ и интегрируется независимо. Его решение дает для формы ударной волны следующее выражение

$$y_3^2(x)-r_a^2=A\cdot(x+\Delta)+(B/4)(x+\Delta)^2 \tag{3.53}$$

Здесь Δ — постоянная интегрирования, для которой из физической картины течения вблизи среза сопла должно быть принято соответствующее значение. Например, для режима течения с образованием присоединенной к кромке ударной волны $\Delta=0$. Для случая больших степеней нерасчетности, когда перед сильно расширившейся струей образуется отошедшая ударная волна, значение Δ должно быть принято равным величине ее отхода вверх по течению от среза сопла, определяемой геометрией затупления и параметрами набегающего потока газа [35, 62]. Рассматривая расстояния от среза сопла, сравнимые с размерами начального участка, т.е. существенно большим, чем Δ, будем полагать $\Delta=0$. Кроме того, ввиду относительной малости второго члена правой части выражения (3.53) по сравнению с первым, в целях упрощения записи последующих выкладок примем для коэффициента $B/4$ его приближенное значение

$$B/4=1/M_\infty^2.$$

так как коэффициент $(5\gamma_\infty-1)/\gamma_\infty$ в диапазоне изменения от 1,0 до 1,67 меняется в пределах от 4 до 4,4. С теми же целями в ряде случаев будем заменять комплекс $(\gamma_\infty+1)^2/4\gamma_\infty$ на его приближенное значение 1, поскольку при $\gamma_\infty=1{,}4$ он равен 1,03 и меняется в том же диапазоне γ_∞ всего от 1 до 1,06. Уравнению ударной волны (3.53) можно придать более наглядный и удобный вид, введя радиус кривизны $\bar{R}_0$ кривой $y_3(x)$ на оси симметрии

$$\bar{R}_0=(1+y_3'^2)^{3/2}/y_3''\,|_{x=0}.$$

Вычисления приводят к выражениям

$$\bar{R}_0^2=\frac{A}{4}=\frac{(\gamma_\infty+1)^2 G_a U\theta^2}{4\pi\varrho_\infty\gamma_\infty M_\infty^2}=\frac{(\gamma_\infty+1)^2}{4\gamma_\infty}\frac{L^2\theta^2}{M_\infty^2}; \qquad (3.54)$$

$$y_3(x)=(r_a^2+2\bar{R}_{0x}+x^2/M_\infty^2)^{1/2}, \qquad (3.55)$$

где $L=[G_aU/(\pi p_\infty)]^{1/2}$ — характерный размер течения, которому, как это будет показано, пропорциональны также и максимальный радиус Y границы струи, и расстояние X до сечения $y_2=Y$. Согласно выражению (2.69) величина L является расстоянием до сечения с максимальным радиусом в случае затопленной недорасширенной струи. Благодаря сохранению большего числа членов по $1/M_\infty^2$ в гиперзвуковых приближениях для величин v_3 и T_3 (см. соотношения (3.42) и (3.43)) полученная зависимость (3.55) для ударной волны имеет качественно правильное поведение при $x\to\infty$, а именно $y_3(x)\to x/M_\infty$. Сравнение уравнения (3.55) с результатами численных расчетов [25, 52] дает удовлетворительное соответствие при $M_\infty\geqslant 3$. Можно также отметить, что достаточно удовлетворительного соответствия можно добиться и для меньших сверхзвуковых чисел M_∞, если в использованных соотношениях (3.42) и (3.43) для v_3 и T_3 заменить, как это обычно делается для этой цели [62], параметр M_∞ на $(M_\infty^2-1)^{1/2}$. Соответствующие конечные формулы при этом, правда, становятся несколько громоздкими.

Имея в распоряжении форму ударной волны $y_3(x)$, можно теперь по соотношению (3.50) определить давление $p_3(x)$ за ней, а по соотношению (3.51) — давление $p_2(x)$ вдоль границы струи. Учтем в уравнении (3.51) следующее из (3.55) выражение

$$y_3(x)\frac{d^2y_3}{dx^2}=\frac{1}{M_\infty^2}-\left(\frac{dy_3}{dx}\right)^2.$$

Используя его, находим

$$\frac{p_2(x)}{p_\infty}=\frac{1}{\gamma_\infty+1}+\frac{\gamma_\infty M_\infty^2}{\gamma_\infty+1}\left(\frac{dy_3}{dx}\right)^2+\frac{\gamma_\infty}{\gamma_\infty+1}\times \tag{3.56}$$

$$\times\left[M_\infty^{-2}\left(\frac{dy_3}{dx}\right)^{-2}-1\right]$$

Из уравнения (3.55) выражение для производной (dy_3/dx) имеет вид

$$M_\infty^2\left(\frac{dy_3}{dx}\right)^2=\frac{M_\infty^2(\mathcal{R}_0^2+xM_\infty^{-2})^2}{r_a^2+2\mathcal{R}_0x+(x/M_\infty)^2}. \tag{3.57}$$

Ограничиваясь случаем больших степеней нерасчетности истечения, пренебрежем радиусом сопла r_a и перейдем к новой независимой переменной l по формуле

$$x=2\mathcal{R}_0M_\infty^2l=2KLl. \tag{3.58}$$

Для распределения давления $p_2(l)$ получаем

$$\frac{p_2(l)}{p_\infty}=1+\frac{\sqrt{\gamma_\infty}}{8}\frac{1}{l(1+l)(1+2l)^2}. \tag{3.59}$$

Помимо удобной формы записи переменная l обладает еще преимуществом при анализе режимов с большими числами M_∞ и K. В этом случае все интересующее поле течения соответствует малым значениям l, что обеспечивает проведение упрощений, соответствующих $l\ll 1$. Аппроксимируем выражение (3.59) в виде

$$\frac{p_2(l)}{p_\infty}=D+\frac{\sqrt{\gamma_\infty}}{8}\cdot\frac{1}{l}, \tag{3.60}$$

где постоянную D подберем из сравнения с численными расчетами [52]. Если числа M_∞ и K очень велики, то величиной $D\sim 0(1)$ в правой части можно пренебречь —

$$\frac{p_2(l)}{p_\infty}=\frac{\sqrt{\gamma_\infty}}{8l}. \tag{3.61}$$

Далее будем использовать для распределения давления вдоль границы струи соотношение (3.60), которое в отличие от (3.61) помимо применимости при $M_\infty\gg 1$ имеет также правильную асимптотику и при $M_\infty\to 0$. Для умеренных сверхзвуковых скоростей спутного потока выражение (3.60) будет при этом рассматриваться как аппроксимация, погрешность которой в сравнении с более точным выражением (3.56) не превышает 15% во всем диапазоне изменения l от 0 до ∞.

Подставляя найденное распределение давления $p_2(l)$ в уравнение второго порядка (3.21), можно тем или иным способом определить форму и параметры границы струи $y_2(x)$.

Аналитическое решение этого уравнения, однако, возможно достаточно просто получить в виде функций Бесселя при законе распределения давления (3.61) для участка струи до ее максимального сечения. Поэтому вместо уравнения второго порядка (3.21) будем использовать более простое и, на первый взгляд, более грубое уравнение первого порядка, выведенное и использованное при аналогичном анализе истечения струи в затопленное пространство (см. уравнение (2.68)).

Как показано ранее, это уравнение получается из приближенной записи закона сохранения количества движения в проекции на ось y в форме $p_2 = \varrho v^2$, где в качестве ϱ берется средняя плотность в плоском перпендикулярно расположенном оси x слое газа, ограниченном границей $y_2(x)$, т. е. $\varrho = G_a/(\pi y_2^2 U)$, а скорость v относительно скорости движения границы dy_2/dt определяется как скорость газа при инерциальном цилиндрическом разлете газа, т. е. $v = y_2/t - dy_2/dt$. После перехода от времени t к переменной x по соотношению $x = Ut$ уравнение принимает вид

$$\left(\frac{y_2}{x} - \frac{dy_2}{dx}\right)^2 = \frac{p_2(x)}{p_\infty}\left(\frac{y_2(x)}{L}\right)^2. \tag{3.62}$$

Забегая вперед, отметим, что, несмотря на чисто качественный характер рассуждений, приводящих к этому уравнению, количественные результаты, которые оно позволяет получить, оказываются простыми по форме и хорошо согласующимися с данными численных расчетов [25, 52].

Совершим в уравнении (3.62) переход от x к переменной l согласно соотношению (3.58). Получим

$$\frac{dy_2}{dl} = \frac{y_2}{l} - \frac{(\gamma_\infty + 1)K}{\sqrt{\gamma_\infty}}\frac{p_2(l)}{p_\infty}y_2 \tag{3.63}$$

Благодаря простоте можно получить приближенное решение его и при законе распределения давления в виде (3.60). Оно имеет вид

$$y_2 = cl\exp\left[-K\sqrt{\gamma_\infty + 1}\cdot\sqrt{l(1+l)}\,\right] \tag{3.64}$$

и может быть записано в канонической форме через параметры l_m и Y в максимальном сечении начального участка

$$\frac{y_2}{Y} = \frac{l}{l_m}\exp\left\{\frac{2(1+l_m)}{1+2l_m}\left[1 - \sqrt{\frac{l(1+l)}{l_m(1+l_m)}}\right]\right\}. \tag{3.65}$$

Это приближенное решение применимо во всем диапазоне чисел M_∞ спутного потока, включая $M_\infty = 0$ и $M_\infty \to \infty$. При $M_\infty \gg 1$, когда $l_m \ll 1$, и в пределах начального участка $l \ll 1$ выражение (3.65) принимает следующий вид

$$\eta_2 = y_2/Y = \xi \exp\left[2(1-\sqrt{\xi})\right], \tag{3.66}$$

$$(\xi = x/X = l/l_m),$$

соответствующий решению уравнения (3.63) при законе распределения давления $p_2(x)$ в виде (3.61). При $M_\infty \to 0$, когда $l_m \gg 1$ и когда в пределах начального участка $l \gg 1$, приходим к уравнению

$$\eta_2 = y_2/Y = \xi \exp(1-\xi), \tag{3.67}$$

полученному в подразд. 2.1.4. На рис. 3.15 представлено сравнение зависимостей $\eta_2(\xi)$ при $K \to \infty$ и $K \to 0$, соответствующих выражениям (3.66) и (3.67). Можно отметить, что в данном каноническом виде (в координатах ξ, η) отличия между кривыми для указанных предельных случаев на участке $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ являются сравнительно небольшими. Невелики и отличия их от численных расчетов [25, 52].

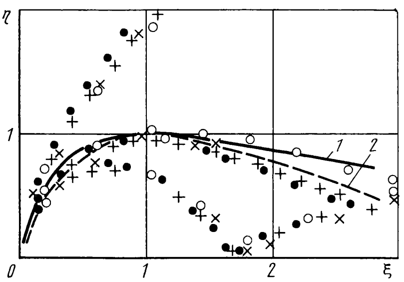


Рис 3.15. Сравнение форм границ $y_2(x)$ струй, истекающих в затопленное пространство и в гиперзвуковой спутный поток·

1 — $M_\infty = 0$, формула (3 67), *2* — $M_\infty \gg 1$, формула (3 66), значки — численный расчет [25, 52], ○ — $M_a = 4$, $\gamma_a = 1{,}3$, $M_\infty = 10$, $n = 10^7$, + — $M_a = 3{,}8$, $\gamma_a = 1{,}37$, $M_\infty = 11$, $\gamma_\infty = 1{,}4$, $n = 3{,}3 \cdot 10^6$, x — $M_a = 5$, $\gamma_a = 1{,}3$, $M_\infty = 15$, $n = 10^7$, o — $M_a = 3$, $\gamma_a = 1{,}39$, $M_\infty = 14{,}75$, $n = 1{,}9 \cdot 10^6$

Определим теперь параметры l_m и Y в максимальном сечении начального участка. Из уравнения (3.63) с помощью условия $(dy_2/dl)|_{l=l_m} = 0$ находим соотношение для определения l_m

$$\frac{\gamma_\infty}{(\gamma_\infty+1)^2 K^2 l_m^2} = D + \frac{1}{4} \frac{\gamma_\infty}{(\gamma_\infty+1)} \frac{1}{l_m},$$

в котором закон распределения давления $p_2(l)$ взят в виде (3.60). Для величин l_m получим

$$16KDl_m = \sqrt{\gamma_\infty K^2 + 64D} - \sqrt{\gamma_\infty} \cdot K.$$

С учетом соотношения (3.58) получим для расстояния X от среза сопла до сечения, где $y_2 = Y$, следующие выражения

$$\frac{X}{L} = \sqrt{\frac{p_\infty}{p_2(X)}};\quad X = \sqrt{\frac{G_a U}{\pi p_2(X)}}, \tag{3.68}$$

где $p_2(X)$ — давление на границе при $x=X$, $y_2=Y$,

$$\frac{X}{L}=\frac{\sqrt{\gamma_\infty K^2+64D}-\sqrt{\gamma_\infty}\cdot K}{8\cdot D}$$

Из сравнения с численными расчетами [25, 52] выбираем $D=0{,}625$, тогда

$$\frac{X}{L}=\frac{1}{5}\left[\sqrt{\gamma_\infty K^2+40}-\sqrt{\gamma_\infty}\cdot K\right]. \qquad (3.69)$$

При $K\to 0$ в соответствии с ранее полученным результатом имеем

$$X=1{,}25L=1{,}25(G_aU/\pi p_\infty)^{1/2}, \qquad (3.70)$$

а при $K\to\infty$

$$X/L=4/(\sqrt{\gamma_\infty}\cdot K). \qquad (3.71)$$

Соответствие выражения (3.69) точным численным расчетам [25, 52] является достаточно хорошим. На рис. 3.16 сплошной линией изображена зависимость X/L от параметра $\sqrt{\gamma_\infty}\cdot K$. Значками показаны некоторые из результатов численных расчетов [25, 62].

Величину максимального радиуса Y начального участка недорасширенной струи определим из соотношения (3.31), которое может быть также представлено в следующей форме:

$$(Y^2-r_a^2)\int_0^1\frac{p_2}{p_\infty}\eta_2\frac{d\eta_2}{d\xi}d\xi=\frac{L^2\theta^2}{2}. \qquad (3.72)$$

Поскольку на участке $0\leqslant\xi\leqslant 1$ кривые $\eta_2(\xi)$ для различных значений M_∞ отличаются сравнительно мало, то при вычислениях интеграла для упрощения вместо решения (3.64) для общего случая можно использовать более простые функции (3.66) или (3.67). Принимая для $\eta_2\xi$ выражение (3.66), соответствующее режиму $K\gg 1$, а для распределения $p_2(\xi)$ формулу (3.60), после некоторых преобразований находим для $\sqrt{\gamma_\infty}\cdot K\geqslant 1$

$$\frac{Y^2-r_a^2}{L^2\theta^2}=\frac{5}{9}\frac{1}{\sqrt{\gamma_\infty}\cdot K}\frac{X}{L}=\frac{\sqrt{\gamma_\infty K^2+40}-\sqrt{\gamma_\infty}\cdot K}{9\sqrt{\gamma_\infty}\cdot K}. \qquad (3.73)$$

Зависимость, получающаяся из этого соотношения, представлена на рис. 3.17 (сплошная кривая) в сравнении с данными численных расчетов [25, 52]. Имеется вполне удовлетворительное соответствие между сравниваемыми результатами при $\sqrt{\gamma_\infty}\cdot K\geqslant 1$. При $0\leqslant\sqrt{\gamma_\infty}\cdot K\leqslant 1$ следует принимать $Y=L\theta$. При $K\to\infty$ находим

$$\frac{Y^2-r_a^2}{L^2\theta^2}=\frac{20}{9\gamma_\infty K^2}. \qquad (3.74)$$

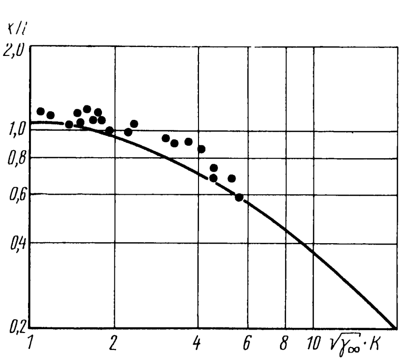


Рис. 3.16. Сравнение приближенной зависимости $X(K)$ по формуле (3.69) (сплошная кривая) с данными численных расчетов [25, 52] (точки)

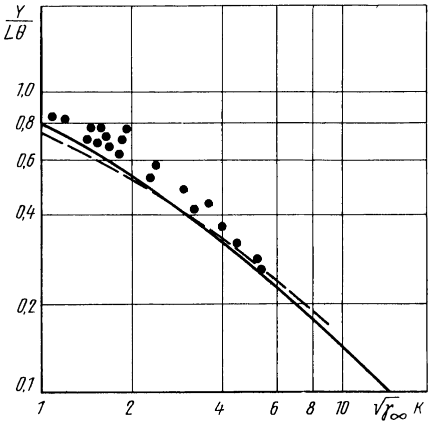


Рис. 3.17. Сравнение приближенной зависимости $Y(K)$, получающейся по формуле (3.73) (сплошная кривая) с данными численных расчетов [25, 52] (точки)

Представляет интерес рассмотрение параметра относительной толщины начального участка струи $\tau^2 = Y^2/X^2$. Он имеет вид

$$\tau = 5\theta / \{ 3\gamma_\infty^{1/4} K^{1/2} [\sqrt{\gamma_\infty K^2 + 40} - \sqrt{\gamma_\infty} \cdot K] \}, \tag{3.75}$$

при $K \sim 1$ $\qquad \tau \sim \theta$,

при $K \to \infty$ $\qquad \tau = \sqrt{5}\,\theta/6. \qquad (3.76)$

Другими словами, при увеличении числа M_∞ спутного потока вместе с уменьшением размеров X и Y (см. соотношения (3.69) и (3.73)) форма начального участка струи, характеризуемая параметром τ, приближается к автомодельной ($\tau \to \mathrm{const}$). Выпишем окончательные выражения для распределений давления $p_2(\xi)$ вдоль границы струи и температуры газа $T_3(\xi)$ за головной ударной волной, примерно равной температуре в сжатом слое спутного потока.

С учетом (3.57) выражения (3.43) и (3.56) приводятся к виду

$$\frac{p_2}{p_\infty} = \frac{1}{\gamma_\infty + 1} + \frac{\gamma_\infty}{\gamma_\infty + 1} \left[\frac{1+2l}{\left(\frac{r_a}{L\theta}\right)^2 + 4l(1+l)} + \frac{\left(\frac{r_a}{L\theta}\right)^2 - 1}{(1+2l)^2} \right]; \tag{3.77}$$

$$\frac{T_3}{T_\infty} = 1 + \frac{\gamma_\infty - 1}{2} \frac{(1+2l)^2}{\left(\frac{r_a}{L\theta}\right)^2 + 4l(1+l)}, \tag{3.78}$$

где $l = x/(2KL) = \xi X/2KL$.

При $K \to \infty$, $x \gg r_a$ имеет место

$$\frac{p_2}{p_\infty} = \frac{\gamma_\infty K^2}{16\xi}; \qquad (3.79)$$

$$\frac{T_3}{T_\infty} = 1 + \frac{\sqrt{\gamma_\infty} \cdot (\gamma_\infty - 1) K^2}{16\xi}. \qquad (3.80)$$

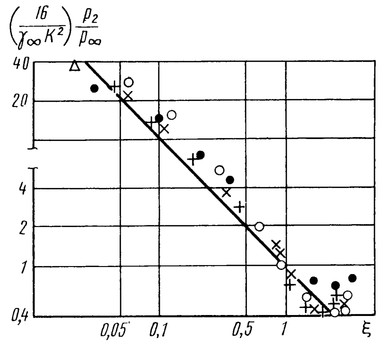


Рис. 3.18. Сравнение приближенной зависимости для распределения давления $p_2(x)$ вдоль границы струи по формуле (3.79) (сплошная кривая) с данными численных расчетов [25, 52] (точки обозначены как на рис. 3.15)

Сравнение распределения давления по формуле (3.79) с результатами численных расчетов представлено на рис. 3.18.

Анализ результатов численных расчетов показывает также, что в координатах ξ, η подобными при $M_\infty \gg 1$, $n \gg 1$ оказываются также формы висячего $y_1(\xi)$ и отраженного $y_4(\xi)$ скачков, которые приближенно могут быть представлены следующими зависимостями:

$$\eta_1 = \frac{y_1}{Y} = \frac{4}{3}\xi^{3/4}\left(\frac{3}{2} - \xi^{3/4}\right); \qquad (3.81)$$

$$\eta_4 = \frac{y_4}{Y} = \frac{2}{5}\left(\xi - \frac{7}{4}\right) \qquad (3.82)$$

Уравнение головной ударной волны (3.55) в координатах ξ, η имеет вид

$$\eta_3 = 3\left\{\frac{2\sqrt{\gamma_\infty}}{5}\xi + \frac{1}{5}\frac{X}{L}\frac{\sqrt{\gamma_\infty}}{K}\xi^2\right\}^{1/2}. \qquad (3.83)$$

Для проведения оценок параметров вязкого слоя смешения полезно иметь приближенные выражения для распределения скоростей $W_e(x)$, $W_i(x)$ и энтальпий $h_e(x)$ и $h_i(x)$ вдоль внешней и внутренней границ — $y_e(x)$ и $y_i(x)$ — этого слоя. При построении таких граничных величин скорости $W_e(x)$ и $W_i(x)$ могут быть использованы ньютоновские оценки величин скорости W_e вдоль внешней стороны невязкой границы струи $y_2(x)$ и скорости W_i в сжатом слое между границей и висячим скачком, скорректированные с результатом численных расчетов [25, 52] струй идеального газа. Достаточно хорошее соответствие с этими расчетами дают следующие выражения:

для скорости вдоль внешней стороны границы струи

$$W_e = \frac{W_\infty}{\sqrt{1+\tau^2}\cdot\sqrt{1+y_2'^2}}; \tag{3.84}$$

для скорости в сжатом слое между висячим скачком и границей

$$W_i = \frac{W_{\max}\chi_2}{\sqrt{1+\tau^2}}, \tag{3.85}$$

где $W_{\max} = \sqrt{2H_a}$ — максимальная скорость истечения, а

$$\chi_2 = \left[1 - \frac{h_a}{H_a}\left(\frac{L^2}{\chi^2} - \frac{1}{n}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma_a}}\right]^{1/2}. \tag{3.86}$$

Для указанных далее целей требуются также выражения для среднеарифметического $\bar{W} = 0{,}5(W_i + W_e)$, разности $(W_i - W_e)$ и модуля разности $|W_i - W_e|$. В целях упрощения при построении выражений для названных величин использована аппроксимация

$$\sqrt{1+y'^2} \approx 1 + 0{,}5(y')^{1{,}25},$$

обеспечивающая точность, но не худшую 7%, в диапазоне $0 \leqslant y' \leqslant 20$.

Имеем:

для средней скорости

$$\bar{W} = W_{\max}\frac{1+m_0}{2\sqrt{1+\tau^2}\,\sqrt{1+y'^2}}, \tag{3.87}$$

где

$$m_0 = W_\infty / W_{\max};$$

для модуля разности скоростей при $m_0 < 1$

$$|W_i - W_e| \approx \frac{W_{\max}}{\sqrt{1+\tau^2}\,\sqrt{1+y_2'^2}}\left(1 - m_0 + 0{,}5 y_2'^{1{,}25}\right); \tag{3.88}$$

для модуля разности скоростей при $m_0 > \sqrt{1+y_2'^2(0)}$.

$$|W_i - W_e| \approx \frac{W_{\max}}{\sqrt{1+\tau^2}\,\sqrt{1+y_2'^2}}\left(m_0 - 1 - 0{,}5 y_2'^{1{,}25}\right). \tag{3.89}$$

Выражения для распределений статических энтальпий $h_e(x)$ и $h_i(x)$ могут быть найдены по приведенным выражениям для распределений скорости $W_e(x)$, $W_i(x)$ с помощью закона сохранения полных энтальпий H_∞ и H_a в невязком течении.

Имеем:
для энтальпий на внешней стороне границы $y_2(x)$

$$\frac{h_e}{h_\infty}=1+\frac{\gamma_\infty-1}{2}\mathrm{M}_\infty^2\left[1-\frac{1}{(1+\tau^2)(1+y'^2)}\right]; \quad (3.90)$$

для энтальпий в сжатом слое между висячим скачком уплотнения и границей струи

$$\frac{h_t}{H_a}=1-\frac{\chi_2^2}{1+\tau^2}. \quad (3.91)$$

3.1.4. Приближенный учет переменности давления атмосферы

Если полет ЛА с реактивным двигателем проходит на очень больших высотах H над поверхностью Земли ($H=100$ км), то характерный размер X начального участка струи двигателя может составить многие десятки километров. На таких высотах давление в атмосфере может меняться на порядок величины, поэтому этот факт необходимо учитывать.

Проведем такой учет с использованием метода нестационарной аналогии. Идея применения этого метода к данной задаче принадлежит Е. Н. Бондареву. При наличии аналитических выражений, описывающих геометрические очертания начального участка, эта идея реализуется очень просто. В нашем распоряжении имеются такие выражения для формы границы струи (3.65) и (3.66), которые для поставленной задачи и используем.

Идеализируем постановку задачи. Пусть ЛА движется строго вертикально и проходит интересующий участок в атмосфере с постоянной скоростью $W_\infty=\mathrm{const}$. Температуру в атмосфере на рассматриваемом участке будем считать постоянной $T_\infty=\mathrm{const}$. Тогда получим и $\mathrm{M}_\infty=\mathrm{const}$. Пусть также к моменту времени t срез сопла аппарата находится на высоте H над поверхностью Земли. Обозначим через h высоту над поверхностью Земли интересующего сечения x струи двигателя. Тогда, очевидно, имеем

$$x=H-h;\ H=W_\infty t;\ x=W_\infty t-h. \quad (3.92)$$

Подставим теперь выражение (3.92) для x через W_∞, t и h в уравнение границы струи. Ограничиваясь для простоты случаем $\mathrm{M}_\infty\gg1$, используем уравнение (3.66). После подстановки находим

$$y_2(t,h)=\frac{Y(h)}{X(h)}(W_\infty t-h)\exp\left\{2\left[1-\sqrt{\frac{W_\infty t-h}{X(h)}}\right]\right\}, \quad (3.93)$$

где $X(h)$ и $Y(h)$ — теперь не постоянные, а функции высоты h, определяемые формулами (3.69) и (3.73), в которых $p_\infty = p_\infty(h)$, $n = n(h) = p_a/p_\infty(h)$.

Отношение

$$\tau = Y(h)/X(h) \tag{3.94}$$

от h не зависит, так как $p_\infty(h)$, присутствующие и в числителе и в знаменателе, сокращаются и величина τ в данной постановке определяется по выражению (3.76). Получаем

$$y_2(t, h) = \tau(W_\infty t - h)\exp\left\{2\left[1 - \sqrt{\frac{W_\infty t - h}{X(h)}}\right]\right\}. \tag{3.95}$$

Если в данном выражении примем $h = \text{const}$, то получим закон движения границы y_2 во времени на заданной высоте h. При этом $X(h) = \text{const}$ и определяется по давлению p_∞ на этой высоте.

Если в том же выражении положим $t = \text{const}$, то для конкретного значения $t(h/W_\infty < t < H/W_\infty)$ получим мгновенный снимок границы струи. В этом случае в последнем уравнении удобно снова вернуться к переменной $x = W_\infty t - h$

$$y_2(t, x) = \tau x \exp\{2[1 - \sqrt{x/X(x)}]\}. \tag{3.96}$$

Здесь $X(x)$ — функция переменной x, имеющая функциональную структуру выражения (3.69), но в котором $n = n(x)$.

Если задаться конкретным выражением для изменения давления p_∞ в атмосфере по высоте, то $X(x)$ можно представить в аналитическом виде. Зададимся, например, моделью экспоненциальной атмосферы, т. е.

$$p_\infty(h) = p_\infty(0)\exp(-\beta h), \tag{3.97}$$

где $p_\infty(0)$ — давление на поверхности Земли; β — известный коэффициент. Теперь можно связать величины давлений на высоте H (на уровне среза сопла аппарата) и на высоте h (т. е. в конкретном сечении струи $x = H - h$):

$$p_\infty(h) = p_\infty(H)\exp(\beta x). \tag{3.98}$$

С использованием этого соотношения функцию $X(x) = X(h)$ можно представить в виде

$$X(x) = X(H)e^{-\beta x/2}, \tag{3.99}$$

где $X(H)$ — характерный продольный размер начального участка, определенный для однородной атмосферы при величине давления $p_\infty(H)$ на высоте нахождения аппарата в данный момент времени.

Уравнение мгновенного снимка границы струи в момент времени t получается в следующем виде:

$$y_2(t, x) = \tau x \exp\{2\,[1 - \sqrt{x/X(x)}\, e^{\beta x/4}]\} \qquad (3.100)$$

Для $\beta=0$ возвращаемся к прежнему выражению для однородной атмосферы. Аналогичные операции могут быть проведены и для уравнений висячего $y_1(x)$ и отраженного $y_4(x)$ скачков уплотнения, головной ударной волны $y_3(x)$, а также и любой функции, отражающей распределение некоторого параметра вдоль струй (например, давления $p_2(x)$ вдоль границы струи $y_2(x)$.

На рис. 3.19 представлено сравнение форм струи с учетом переменности давления в атмосфере (сплошные кривые) и без такого учета (пунктир) для условий $H=150$ км, $G_aU=10^6$Н, $M_\infty=10$.

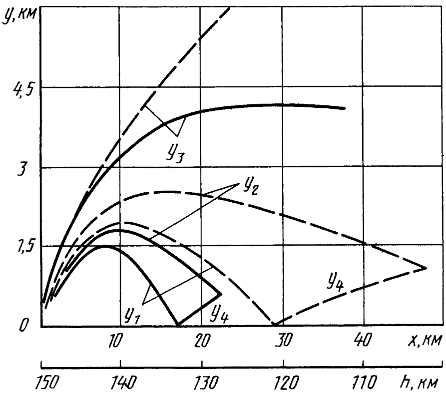


Рис. 3.19 Влияние переменности давления в атмосфере на форму границы струи ($H=150$ км; $P=10^6$ Н; $M_\infty=10$):

——— с учетом переменности давления, - - - без учета переменности давления; y_1, y_3, y_4 — ударные волны, y_2 — граница струи.

3.1.5. О влиянии начальной неравномерности потока на срезе сопла на характеристики сверхзвуковых струй

Анализ сверхзвуковых неизобарических струй идеального газа в разд. 2.1 и 3.1 проведен применительно к истечению струй из конических сопл. При этом предполагается, что в коническом сопле реализуется течение типа источника.

Известно [53], что в реальном коническом сопле в области сопряжения криволинейного контура трансзвуковой части с прямолинейной образующей возникает висячая ударная волна. В результате течение на срезе сопла отличается от течения типа источника, а ударная волна, распространяясь далее в струю, может изменить поле течения в непосредственной окрестности выхода сопла.

В целом же расчеты, проведенные в работе [53], показали, что влияние волновой структуры течения в коническом сопле на струю быстро затухает при удалении от среза сопла и в первом приближении при расчете струй параметры на срезе конического сопла можно принимать, как в течении от источника.

По характеристикам струй, вытекающих из конических сопл, имеется большая информация. Для того чтобы воспользоваться этой информацией, не прибегая к специальным численным расчетам, в случае произвольного распределения параметров на срезе профилированного сопла необходимо выяснить возможность моделирования струи, вытекающей из произвольного сопла, струей, вытекающей из конического сопла.

Такой вопрос возникает и при экспериментальном моделировании. В экспериментах с модельными струями обычно затруднительно воспроизвести истинный контур профилированного сопла, например реактивного двигателя, из-за малых размеров модели. Поэтому модельные эксперименты проводятся на соплах простой геометрической конфигурации.

Рассмотрим вопрос о моделировании струи произвольного сопла в соответствии с результатами работы [4].

Критерии моделирования. Будем предполагать, что при моделировании сохраняются неизменными рабочее тело (идеальный газ с заданным отношением удельных теплоемкостей γ_a) и температура торможения T_0.

Можно считать, что при больших нерасчетностях течение в недорасширенной струе определяется интегральными параметрами сопла: расходом G_a, импульсом $\mathcal{J}_a$, радиусом выходного сечения сопла r_a. Тогда естественно предположить, что коническое сопло, струя которого должна моделировать струю, вытекающую из данного произвольного сопла, должно иметь такие же значения G_a, $\mathcal{J}_a$, r_a.

Расход газа через коническое сопло равен

$$G_a = \varrho_{ae} W_{ae} F_a \cos^{-2}\theta_{ae}/2, \tag{3.101}$$

а импульс газа в проекции на ось сопла равен

$$\mathcal{J}_a = G_a W_{ae} \cos^2\theta_{ae}/2 + p_{ae} F_a, \tag{3.102}$$

где индексом «ae» обозначены параметры газа на кромке среза эквивалентного конического сопла, а F_a — площадь выходного сечения этого сопла, равная площади выходного сечения исходного сопла. Неизвестными параметрами являются число M_{ae} на кромке среза конического сопла, степень нерасчетности $n_e = p_{ae}/p_\infty$ и полуугол сопла θ_{ae}.

Полуугол конического сопла в обычно представляющем интерес диапазоне изменения $0 \leqslant \theta_a < 20°$ довольно слабо влияет на характеристики начального участка струи и в отличие от M_a и n является несущественным параметром. Поэтому можно положить $\theta_{ae} = \theta_a$, где θ_a — угол наклона контура исходного сопла в выходном сечении, и использовать уравнения (3.101) и (3.102) для нахождения существенных параметров M_{ae} и n_e. Эти уравнения можно представить в следующем безразмерном виде:

$$\mathcal{J}\left(1 + \frac{\gamma_a - 1}{2} M_{ae}^2\right)^{0,5} \cos\theta_{ae}/2 - M_{ae} - (\gamma_a M_{ae})^{-1} = 0; \tag{3.103}$$

$$n_e = n\left[\bar{J} - M_{ae}\left(1 + \frac{\gamma_a - 1}{2}M_{ae}^2\right)^{-0,5}\cos^2\theta_{ae}/2\right]\bar{G}, \quad (3.104)$$

где $\bar{J} = J_a/G_a(\gamma_a R T_0)^{0,5}$; $\bar{G} = G_a(\gamma_a R T_0)^{0,5}/(p_a F_a)$; R — газовая постоянная рабочего тела; p_a — статическое давление газа на кромке среза исходного сопла; n — степень нерасчетности исходного сопла.

Результаты моделирования. В качестве сопл с существенно неравномерным распределением параметров на срезе можно выбрать, например, сопла, построенные путем укорочения сверхзвуковой части осесимметричных сопл с угловой точкой в критическом сечении и равномерным потоком с числом M_0 в выходном сечении. Число M_0 и степень укорочения сверхзвуковой части варьировались таким образом, что параметры эквивалентного сопла M_{ae} и θ_{ae} изменялись в диапазонах $3 \leqslant M_{ae} \leqslant 5$ и $0 < \theta_{ae} \leqslant 20°$. Проведенные расчеты подтвердили возможность такого моделирования начального участка струи на различных режимах истечения. В качестве иллюстрации рассмотрим моделирование струи, вытекающей из профилированного сопла со следующими параметрами: $\gamma_a = 1{,}4$, $M_0 = 3{,}989$, отношение площадей сопла $F_a/F_* = 5{,}1$, число Маха, определенное по отношению площадей сопла, $M_г = 3{,}20$, $\theta_a = 13{,}1°$. Коническое сопло, эквивалентное данному соплу по расходу и импульсу газа в выходном сечении, согласно (3.103) и (3.104) должно иметь следующие параметры: $M_{ae} = 3{,}25$,

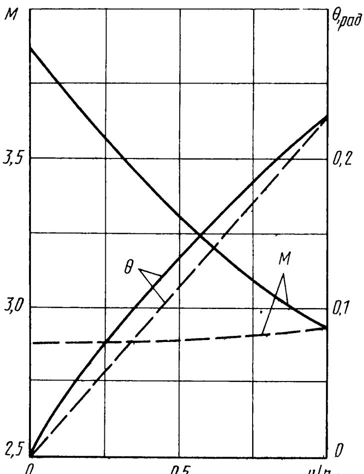


Рис 3.20. Сравнение распределений M и θ в выходном сечении профилированного (сплошные линии) и эквивалентного (пунктирные линии) сопл

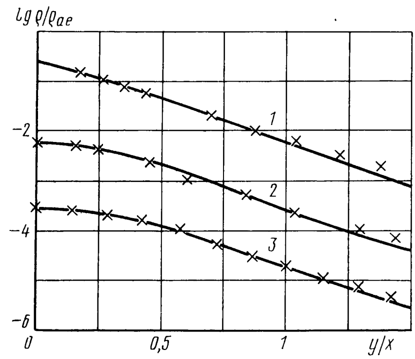


Рис. 3.21. Распределение плотности в поперечных сечениях струи:

1 — $x/r_a = 5$, *2* — $x/r_a = 25$, *3* — $x/r_a = 100$ —— профилированное сопло, × — эквивалентное коническое сопло

$n_e/n=0{,}67$. На рис. 3.20 приведены распределения чисел Маха и угла наклона вектора скорости на срезе исходного профилированного сопла и эквивалентного конического сопла.

Прежде всего рассмотрим истечение струи в вакуум, поскольку образующееся поле течения является элементом поля течения на начальном участке струи и при истечении в среду с конечным противодавлением. На рис. 3.21 показаны распределения плотности в поперечных сечениях струи. Из анализа этих графиков следует, что уже на относительно небольшом расстоянии от среза сопла $x/r_a=5$ наблюдается удовлетворительное совпадение распределений плотности за исключением непосредственной окрестности оси струи. Расхождение в значениях плотности газа на оси струи неудивительно, поскольку в сечении $x/r_a=5$ точка на оси струи в обоих случаях находится еще внутри непосредственного влияния контура сопла. При дальнейшем удалении от среза сопла значения плотности согласуются и на оси струи.

Для всех сечений струи, представленных на рис. 3.21, характерно согласование распределений плотности в центральной части струи и постепенное расхождение в периферийной области ($y/x>1$), где плотность газа в струе, вытекающей из профилированного сопла, может заметно превышать плотность газа в струе, вытекающей из эквивалентного конического сопла. Расхождение в периферийной области связано с различием в положении предельной линии тока, на которой плотность газа равна нулю, в случае профилированного сопла она расположена дальше от оси струи, и соответственно в периферийной области плотность газа больше. Отсюда следует, что течение в периферийной области струи определяется не интегральными характеристиками сопла, а локальными значениями параметров потока на срезе сопла вблизи его кромки.

Распределение параметров газа в поле течения, соответствующем истечению струи в вакуум, определяет граничные условия перед висячим скачком уплотнения, образующимся при истечении в среду с конечным давлением. Поэтому тот факт, что при истечении газа в вакуум из профилированного и эквивалентного конического сопл распределения газодинамических параметров на некотором удалении от среза сопла оказываются близкими, обусловливает возможность моделирования и при истечении в затопленное пространство или в спутный поток.

Сравнение формы начального участка недорасширенной струи в затопленном пространстве при истечении из профилированного сопла с $n=10$ и эквивалентного конического сопла с $n_e=6{,}7$ показало, что, начиная уже с относительно небольшого расстояния от среза сопла, удовлетворительно согласуются форма висячего скачка и границы струи, а также положение и размер центрального скачка. Что касается непосредственной окрестности сопла, то лучшее моделирование границы струи получается, если принять для эквивалентного сопла те же значения нерасчетности и числа Маха на кромке среза сопла, что и у профилированного сопла, поскольку при этом условии точно совпадают начальные углы границы струи.

Моделирование струи, вытекающей из профилированного сопла, струей, вытекающей из конического сопла, в случае истечения в спутный сверхзвуковой поток иллюстрирует рис. 3.22.

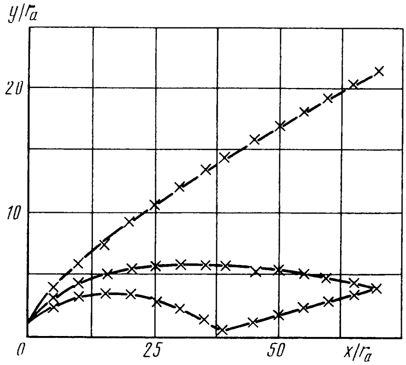


Рис. 3.22. Моделирование формы начального участка недорасширенной струи в спутном потоке с $M_\infty=6$:

——— профилированное сопло; x — эквивалентное коническое сопло

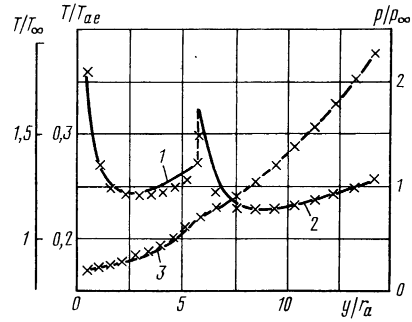


Рис. 3.23. Сравнение распределений давления и температуры в поперечном сечении струи $x/r_a=39$:

——— профилированное сопло; x — эквивалентное коническое сопло; 1 — T/T_{ae}, 2 — T/T_∞, 3 — p/p_∞

На рис. 3.23 для этого же случая дано сравнение распределений статического давления и температуры в одном из характерных сечений струи: в сечении отражения висячего скачка от оси. Статическая температура в области струи отнесена к температуре на кромке выходного сечения эквивалентного сопла, а в области спутного потока к температуре невозмущенного спутного потока. Число Маха спутного потока $M_\infty=6$, степень нерасчетности у профилированного сопла $n=100$, а у эквивалентного конического сопла $n_e=67$. Распределения давления и температуры согласуются с удовлетворительной точностью.

Приведенные выше результаты расчетов относятся к недорасширенным струям с такими значениями нерасчетности ($n\geqslant10$), когда длина начального участка достаточно большая и есть все основания для интегрального описания начальных условий на срезе сопла. С этой точки зрения удивительным оказалось, что удовлетворительное моделирование формы начального участка в целом наблюдается и при небольших значениях нерасчетности, в том числе и при $n<1$, как показано на рис. 3.24.

В заключение заметим, что импульсы профилированного и конического сопл обычно различаются в пределах 1 . . . 2%. Если пренебречь этим различием, то для определения M_{ae} и n_e вместо

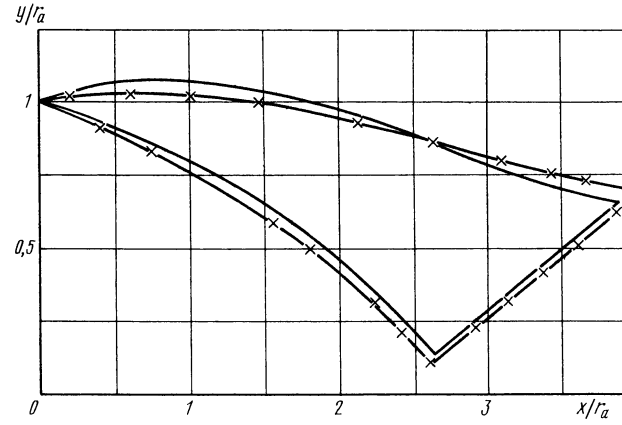


Рис. 3.24. Моделирование формы начального участка перерасширенной струи: —— профилированное сопло, $n=0{,}8$, x — эквивалентное коническое сопло, $n=0{,}535$

выражений (3.103) и (3.104) можно использовать более простые соотношения

$$q(M_{ae}, \gamma_a) = (F_*/F_a)\cos^2\theta_{ae}/2;$$

$$n_e = n\frac{\pi(M_{ae}, \gamma_a)}{\pi(M_a, \gamma_a)},$$

где $q(M,\gamma)=\varrho W/(\varrho_* W_*)$ и $\pi(M,\gamma)=p/p_0$ — известные газодинамические функции; M_a — число Маха на кромке выходного сечения профилированного сопла.

3.1.6. Сравнение с экспериментальными данными

При сравнении результатов численного расчета истечения сверхзвуковой струи невязкого газа в спутный поток следует учитывать, что различие между ними может быть обусловлено не только влиянием развивающегося вдоль границы струи вязкого слоя смешения, как в случае затопленной струи, но и формой кормовой части модели, отрывом пограничного слоя на корпусе модели под действием истекающей струи. Форма кормовой части оказывает заметное влияние на геометрические характеристики участка, особенно при небольших нерасчетностях [56].

Сравнение результатов расчета и эксперимента для струи, истекающей в спутный сверхзвуковой поток, показывает, что согласование их тем лучше, чем меньше M_a и чем больше M_∞. При указанных условиях уменьшается относительная длина начального участка и соответственно оттесняющее действие вязкого слоя смешения.

На рис. 3.25 показано сравнение результатов расчета и эксперимента [56] по расстоянию до точки отражения висячего скачка. При увеличении M_∞ расчет и эксперимент сближаются и при $M_\infty = 10$ хорошо совпадают. При небольших сверхзвуковых числах M_∞ расхождение между расчетом и экспериментом составляет 30 ... 35%, причем расчет завышает X_S.

На рис. 3.25 приведены также расчетные и экспериментальные данные по максимальному диаметру висячего скачка. Совпадение вполне удовлетворительное.

На рис. 3.26 приведены экспериментальные данные И. М. Карпмана по распределению полного давления за прямым скачком в струе, истекающей в спутный сверхзвуковой поток с числом $M_\infty = 3.1$. Измерения проведены в поперечном сечении $x/X_S = 0{,}75$. Здесь же сплошными линиями показаны результаты расчета для струи невязкого газа.

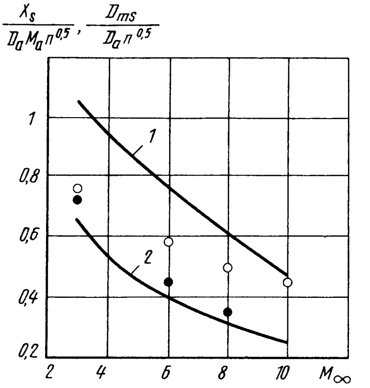


Рис. 3.25. Сравнение расчетных и экспериментальных значений X_S и D_{mS} спутной струи ($M_a \approx 3$, $\gamma_a = 1{,}4$): *1*,○ — X_S, *2*, ● — D_{mS}, ——— численный расчет, ○, ● — эксперимент

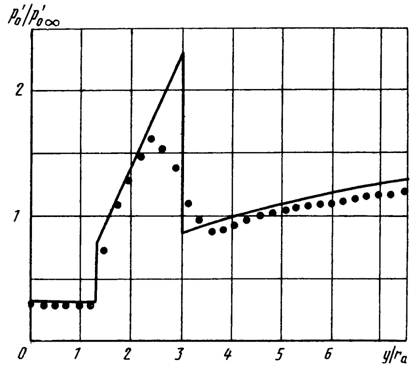


Рис. 3.26. Сравнение расчетных и экспериментальных распределений p_0' в спутной струе ($M_\infty = 3{,}1$, $M_a = 3{,}15$, $n = 11$, $x/X_S = 0{,}75$): ——— численный расчет, ● — эксперимент И. М. Карпмана

Качественно поведение результатов носит тот же характер, что и в случае затопленной струи. За висячим скачком существует область невязкого течения, в которой наблюдается согласование результатов расчета и эксперимента. В вязком турбулентном слое смешения происходит «срезание» профиля полного давления невязкой струи, и полное давление в точке, соответствующей границе невязкой струи, может быть заметно меньше, чем в струе невязкого газа.

Во внешней части вязкого слоя смешения и в области невязкого течения за ним p_0' снова возрастает. Результаты расчета и эксперимента вне слоя смешения во внешнем потоке качественно и приближенно количественно согласуются.

Сравнение картины течения, рассчитанной в приближении невязкого газа, с экспериментальными данными в случае истечения в сверхзвуковой спутный поток приводит к такому же выводу, как и в случае истечения в затопленное пространство. В результате вязкого взаимодействия слоя смешения с областью невязкого течения за висячим скачком происходит его оттеснение в сторону оси струи. Этот эффект проявляется, в основном, вниз по потоку за сечением, где диаметр висячего скачка максимален.

3.2. ГАЗОДИНАМИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА НАЧАЛЬНОГО УЧАСТКА НЕИЗОБАРИЧЕСКОЙ СТРУИ ВЯЗКОГО ГАЗА В СПУТНОМ СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

3.2.1. Влияние вязкости на течение в недорасширенной струе, истекающей в спутный сверхзвуковой поток

Вязкость оказывает существенное влияние на структуру течения недорасширенной струи, истекающей в спутный сверхзвуковой поток. Ее влияние в этом случае оказывается более многообразным и более сложным, чем в случае недорасширенной затопленной струи.

Как и при истечении в затопленное пространство, в данном случае через слой смешения, нарастающий вдоль границы $y_2(x)$ (см. рис. 1.17), может проходить значительная доля всего расхода истекающего газа. Процессы вязкого перемешивания значительных масс истекающего газа с газом спутного потока приводят к значительным по величине диссипативным эффектам, обусловливающим перераспределение параметров как в самом слое смешения, так и в прилежащих к нему зонах невязкого потока. Изменяются положения ударных волн и размеров начального участка струи. Качественный характер и интенсивность данного эффекта вязкого взаимодействия существенно зависят как от параметров M_∞, M_a, n, i_0, m, Re, так и от режима течения в слое смешения (турбулентный, ламинарный, разреженный). При этом если в случае затопленной струи истекающий газ в слое смешения тормозится, то в спутной струе он может также и ускоряться, если $m>1$, и почти не менять своей скорости, если $m\approx 1$. Таким образом, здесь добавляются два существенных параметра, определяющих вязкое взаимодействие, M_∞ и m. Для случая истечения с большими степенями недорасширения ($n\geqslant 10$) параметр $m=W_e/W_i$ может заметно меняться на длине начального участка струи, поскольку скорость газа W_e на внешней границе $y_l(x)$ слоя смешения является переменной (возрастает с удалением от сопла), тогда как скорость истекающего газа W_i на внутренней границе $y_i(x)$ является почти постоянной и близкой к максимальной скорости истечения $W_{\max}=\sqrt{2H_a}$. Это означает, что если $m_0=$

$=u_\infty/W_{max}=1$, то местные значения m в пределах начального участка фактически всегда отличаются от единицы. Поэтому процесс смешения на начальном участке практически всегда протекает при отличном от нуля поперечном градиенте скорости $\partial W/\partial n$ и напряжении силы срения $\tau\sim\partial W/\partial n$.

При истечении недорасширенной струи в спутный поток проявляется также специфичный для этого случая эффект вязкого взаимодействия вблизи кромки сопла и донного среза аппарата, создающего струю. Образующийся на боковой поверхности аппарата пограничный слой может на некотором расстоянии от выходной кромки сопла отрываться под воздействием сильно расширяющейся (при $n\gg1$) струи [30, 66]. При этом в области взаимодействия образуются такие газодинамические элементы, как отрывная застойная зона, новые скачки уплотнения и слои смешения (см. рис. 1.9). Конфигурация границы струи и висячего скачка вблизи области взаимодействия изменяются (появляются изломы). Увеличение степени нерасчетности n приводит к смещению точки отрыва к носку аппарата и к увеличению угла отрывной зоны. При очень больших степенях нерасчетности обтекание струи сверхзвуковым спутным потоком происходит с образованием отошедшей ударной волны (см. рис. 1.10), отход которой превышает размеры аппарата, из которого истекает струя.

Эффекты вязкого взаимодействия вблизи выходной кромки сопла зависят от режима течения (турбулентный, переходный, ламинарный) и параметров спутного потока и истекающей струи. Они оказывают существенное влияние на газодинамическую обстановку вблизи сопла и аппарата, однако их влияние на области течения, удаленные от сопла на расстояния порядка длины X начального участка, как показывают экспериментальные [27, 56, 57] и расчетные [52] исследования, оказывается сравнительно слабым. Физическая причина указанного слабого влияния состоит в том, что массы газа, вовлекаемые в эти процессы, относительно малы в сравнении с массами газа, участвующими в процессах вблизи границы $y_2(x)$ струи на расстояниях $x\sim X$. Поэтому из-за трудностей решения задачи в общей постановке в большинстве расчетных схем как без учета вязкости [25, 52], так и с учетом последней [9, 32, 73] расчет параметров течения в недорасширенных струях проводится либо без учета особенностей течения вблизи выходной кромки сопла, либо с использованием крайне грубых приближений. В большей части начального участка струи результаты расчета оказываются достаточно близкими к данным экспериментов, хотя наблюдаются и некоторые отличия, связанные с неизбежным возмущением набегающего спутного потока устройством, создающим струю.

К настоящему времени в литературе описан ряд экспериментальных [27, 56] и расчетных [9, 32, 73] исследований влияния вязкости на структуру течения в спутной недорасширенной струе. Большая часть из этих исследований представляет расчетные работы, в которых проведено численное интегрирование упрощенных [9, 73] и в некоторых случаях и полных [32] уравнений Навье—Стокса. Несмотря на применение современных быстродействующих вычислительных машин, эти расчеты пока являются сравнительно трудоемкими. В работе [54] описан приближенный метод, основанный на сопряжении расчета параметров в слое смешения интегральным методом (см. подразд. 1.2.2) с расчетом течения в невязких областях потока по уравнениям идеальной жидкости. Сопряжение указанных схем осуществлено с использованием законов сохранения. Здесь проведена серия расчетов по выявлению основных особенностей механизма вязкого взаимодействия струи и спутного потока при турбулентном режиме течения в слое смешения.

Экспериментальных работ, посвященных исследованию недорасширенных струй в спутном сверхзвуковом потоке, проведено значительно меньше, что связано с большой сложностью организации соответствующих экспериментов. Сюда можно отнести исследования [27, 56] при турбулентном режиме. Далее будут описаны некоторые данные экспериментов при ламинарном режиме, полученные В. В. Волчковым и А. В. Ивановым.

Течение в переходном участке струи, истекающей в спутный поток, изучено недостаточно. Получение надежных экспериментальных данных здесь затруднено тем, что на течение в этой области оказывает нежелательное постороннее воздействие следы от державки модели, из которой истекает струя, и от толстого пограничного слоя на боковой поверхности модели, если в экспериментах используется схема с кольцевым соплом [27]. Для этой области имеется весьма ограниченное число данных расчетов с использованием уравнений Навье—Стокса. Для проведения обобщений такой объем данных далеко недостаточен.

3.2.2. Вязкое взаимодействие вблизи выходной кромки сопла

Расширение струи, истекающей из сопла, вызывает отклонение внешнего потока и повышение давления, которое частично передается вверх по потоку по пограничному слою на боковой поверхности аппарата. Если степень нерасчетности достаточно низка, то указанное повышение давления реализуется в скачке уплотнения, образующемся вблизи кромки сопла (см. рис. 1.6), а повышение давления вверх по потоку мало. При увеличении n передача давления вверх по потоку возрастает и при некотором значении происходит отрыв пограничного слоя перед кромкой данного среза (см. рис. 1.9). Дальнейшее увеличение n приводит к смещению точки отрыва вверх по потоку до тех пор, пока она не достигнет носка аппарата. После этого увеличение n будет приводить к увеличению угла отрывной зоны. Количественные характеристики этого явления существенно зависят от режима течения в пограничном слое на боковой поверхности аппарата и в слое смешения струи.

Описание и расчет явления сложен, поскольку положение точки отрыва зависит от начального отклонения струи, которое в свою очередь определяется протяженностью зоны отрывного течения. Последнее должно быть ясно из того факта, что до точки присоединения отрывной зоны к границе струи форма последней соответствует случаю истечения в затопленное пространство с давлением, равным давлению в отрывной зоне, тогда как ниже по течению от точки присоединения ее форма определяется переменным давлением, как это и присуще истечению в спутный сверхзвуковой поток.

В работе [30] для определения параметров течения вблизи выходной кромки сопла при наличии отрыва использован интегральный метод расчета, базирующийся на уравнениях, соответствующих приближению пограничного слоя. Вязкий слой на границе истекающей струи условно разделяется на две области, причем линия раздела определяется как геометрическое место точек нулевого трения. Подобно описанному в подразд. 1.3.3 способу интегральные уравнения приводятся к несжимаемой форме и далее преобразуются с помощью использования автомодельных про-

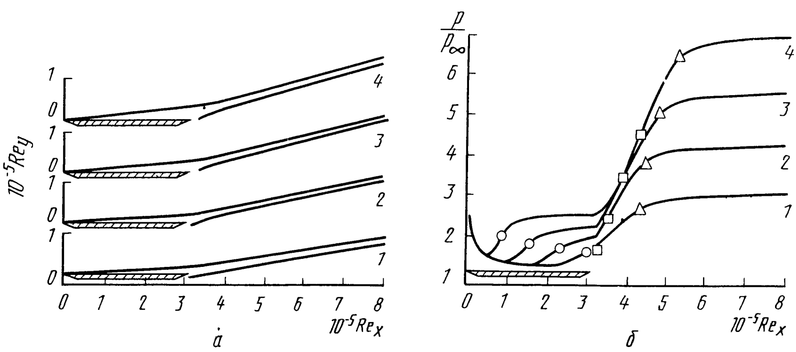


Рис. 3.27. Влияние степени нерасчетности истечения на границу струи и распределение давления в области взаимодействия при ламинарном режиме ($M_a=4$; $M_\infty=6$):

а — границы y_i и y_e струи, *б* — распределение давления, *1* — $n=7{,}3$, *2* — $n=14{,}3$, *3* — $n=25{,}3$, *4* — $n=41{,}7$, ○ — точка отрыва, □ — задняя критическая точка, △ — критическая точка

филей. В результате получается система из шести (по три для наружной и внутренней областей течения) нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для интегральных характеристик. При решении этой системы с помощью постановки граничных условий осуществляется сопряжение течения в слое смешения струи с зонами невязкого течения и зоной отрывного течения на боковой поверхности аппарата.

На рис. 3.27 ... 3.30 приводятся некоторые результаты численных расчетов, показывающие влияние степени нерасчетности n на границу струи и распределения давления вблизи среза сопла.

На рис. 3.27 даны результаты расчетов, соответствующие ламинарному режиму, числам $M_\infty=6$ и $M_a=4$ и диапазону степени нерасчетности $7{,}3\leqslant n\leqslant 41{,}7$. Здесь расстояние x вдоль оси струи представлено в виде числа $\mathrm{Re}_{\infty x}=\varrho_\infty W_\infty x/\mu_\infty$, рассчитанного по условиям в невозмущенном потоке и длине x. Координата y на рис. 3.27 выражена в виде числа $\mathrm{Re}_{\infty y}=\varrho_\infty W_\infty y/\mu_\infty$. В таком виде эти результаты могут быть распространены (для $M_\infty=6$, $M_a=4$) на различные числа Re в пределах существования ламинарного режима.

На рис. 3.28 ... 3.30 приводятся аналогичные результаты расчетов взаимодействия для $M_\infty=4$, $M_a=2$ при ламинарном, турбулентном и переходном режимах течения. Под переходным

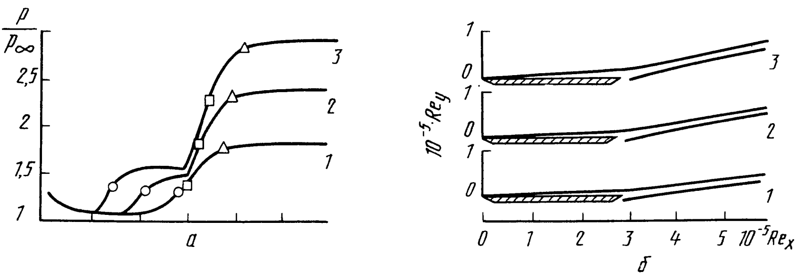


Рис. 3.28. Влияние степени нерасчетности истечения на границы струи и распределение давления в области взаимодействия при ламинарном режиме ($M_a=2$; $M_\infty=4$):

а — распределение давления; *б* — границы струи, *1* — $n=2{,}7$, *2* — $n=4{,}2$, *3* — $n=6$, ○ — точка отрыва, □ — задняя критическая точка; △ — критическая точка

режимом здесь понимается режим с ламинарным пограничным слоем на боковой поверхности аппарата и турбулентным слоем смешения струи. Для случая турбулентного режима по оси абсцисс отложено безразмерное расстояние x в виде $(x-l_a)/\delta_a$, где l_a — длина аппарата, а δ_a — толщина пограничного слоя на боковой поверхности аппарата у среза сопла. По оси ординат на рис. 3.29 поперечные расстояния выражены в единицах δ_a.

Результаты приведенных расчетов показывают, что при ламинарном режиме уже при степенях нерасчетности $n\approx 10$ отрывная зона распространяется на всю длину аппарата. Для турбулентного режима течения соответствующие значения n оказываются значительно большими. Случай переходного режима занимает промежуточное положение.

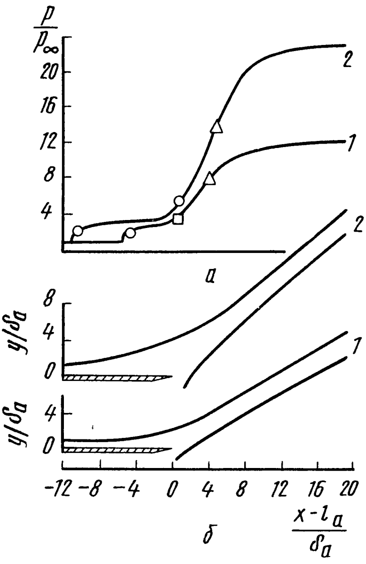


Рис. 3.29. Влияние степени нерасчетности истечения на границы струи и распределения давления в области взаимодействия при турбулентном режиме ($M_a=2$; $M_\infty=4$):

а — распределение давления; *б* — границы струи, *1* — $n=112$, *2* — $n=644$, ○ — точка отрыва, □ — задняя критическая точка, △ — критическая точка

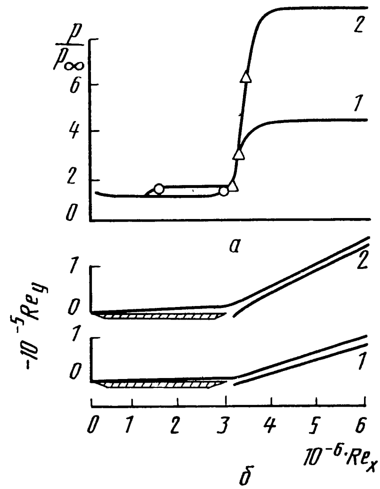


Рис. 3.30. Влияние степени нерасчетности истечения на границы струи и распределение давления в области взаимодействия при переходном режиме ($M_a=2$; $M_\infty=4$):

а — распределение давления, *б* — граница струи, *1* — $n=13$, *2* — $n=59$, ○ — точка отрыва, △ — критическая точка

В рассмотренной работе [30] приведены также аппроксимации параметров профилей для различных зон и режимов течения.

Рассмотрим обтекание струи и аппарата сверхзвуковым потоком с большими значениями степени нерасчетности и меньшими уровнями чисел Рейнольдса, что осуществляется при полетах на больших высотах ($H \gtrsim 100$ км). Для этого обратимся к экспериментальным результатам, полученным С. Т. Барышевым, В. В. Волчковым и. А. В. Ивановым в газодинамической установке низкой плотности.

В этих экспериментах при создании спутного потока использовался воздух. Диапазон исследованных чисел Маха спутного потока равнялся $3{,}5 \leqslant M_\infty \leqslant 5{,}5$, число Маха на срезе сопла, создающего струю, было равно $M_a=1$. В качестве рабочего газа для образования исследуемой струи использовались воздух, аргон, гелий, а также углекислый газ. Температура торможения струи во всех опытах соответствовала комнатной, температура торможения во внешнем потоке составляла 300 К, а в некоторых режимах — 550 К.

Исследуемые струи выдувались из цилиндрической модели с конической головной частью при угле раствора конуса 60°. Длина модели составляла 9,5 мм. Модель крепилась на донной державке, выполнявшей роль канала для подачи рабочего газа (диаметр модели 2,3 мм, диаметр державки 1 мм). Зазор между моделью и державкой площадью 0,78 мм^2 является кольцевым звуковым соплом. Возмущение течения в области внутри висячего скачка от данной державки проявлялось лишь на больших расстояниях от среза сопла, т. е. вне исследуемой области. Для расчета гидравлического сопротивления державки определялись расходные характеристики тракта. Степень нерасчетности в опытах менялась в пределах от $3{,}5 \cdot 10^3$ до $3{,}7 \cdot 10^5$, а угол разворота струи на срезе сопла от 64 до 110°. Для визуализации течения и измерения плотности применялся метод электронного пучка.

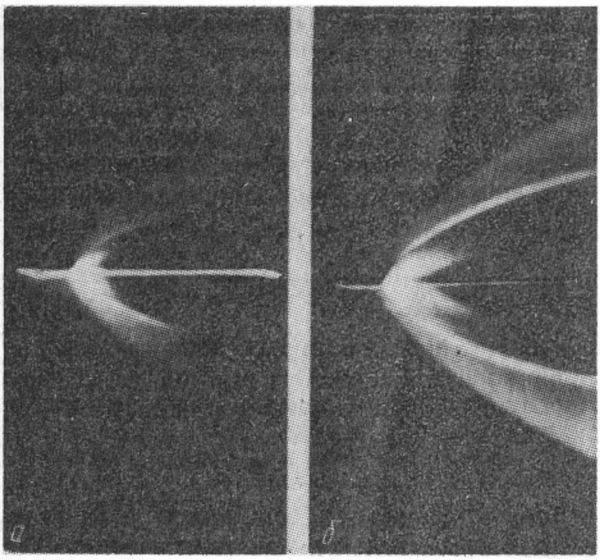


Рис. 3 31. Сильно недорасширенные струи гелия, истекающие из звукового сопла в сверхзвуковой поток воздуха (M_∞=3,7; Re_∞/1 см=100):
а — n=3550, Re_a=1900, Re_0=25, *б* — n=7000, Re_a=3750, Re_0=35

На рис. 3.31 показана картина течения при выдувании из модели струи гелия в режиме течения с невысокой (в данных опытах) степенью разреженности. Число Маха внешнего потока равно 3,7, число Рейнольдса Re_∞/1 см=100 при n=3550 и n=7000. На рисунке отчетливо видны тонкий висячий скачок в струе, область сжатого слоя, отрыв пограничного слоя на цилиндрической поверхности модели. Такая картина течения соответствует описанной в работе [30].

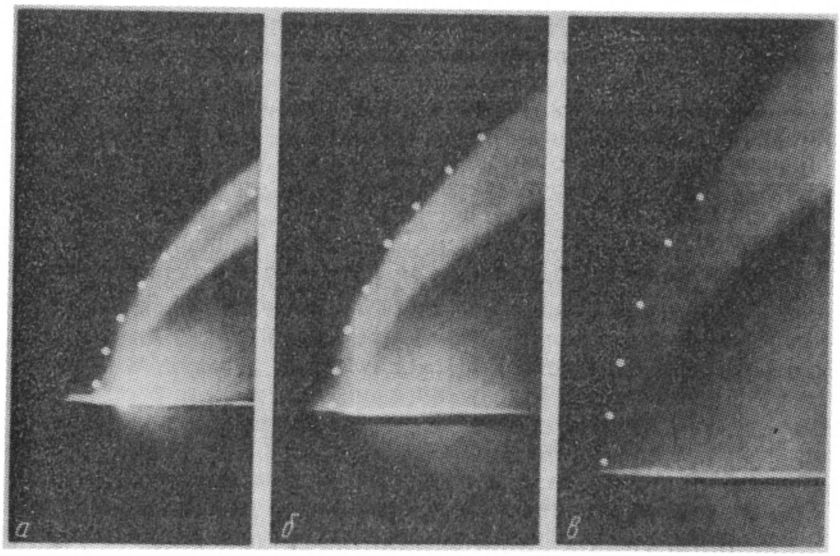


Рис. 3.32. Сильно недорасширенные струи ($M_a=1$), истекающие в сверхзвуковой воздушный поток ($M_\infty=55$; $Re_\infty/1$ см$=550$):

а — $n=4{,}4\cdot10^4$, $Re_a=3{,}5\cdot10^4$, $Re_0=200$, *б* — $n=10^5$, $Re_a=10^5$, $Re_0=350$, *в* — $n=2{,}15\cdot10^5$, $Re_a=2{,}1\cdot10^5$, $Re_0=500$

При повышении степени нерасчетности струи возрастают характерные размеры ее начального участка и увеличивается угол разворота струи на кромке сопла. При этом образующаяся перед струей ударная волна перемещается к носку модели. Этот процесс можно наблюдать по фотографиям (рис. 3.32), отражающим истечение струи углекислого газа в сверхзвуковой поток воздуха при $M_\infty=5{,}5$ и $Re_\infty/1$ см$=550$. Наблюдается отрыв пограничного слоя, который происходит вблизи носка модели (см. рис. 3.32, *а*). Режим, показанный на рис. 3.32, *в*, соответствует режиму отхода ударной волны от струи Δ_0, равного длине модели l_a.

Обтекание струи сверхзвуковым спутным потоком происходит аналогично обтеканию затупленного тела, т. е. с образованием отошедшей ударной волны. Дальнейшее увеличение степени нерасчетности приводит к возрастанию отхода ударной волны и удалению последней вверх по потоку от носка модели. При таких режимах влияние модели на течение в сжатом слое за головной ударной волной, по-видимому, становится незначительным.

Результаты измерений концентраций истекающего углекислого газа и воздуха, проведенных методом электронного пучка, показали, что как и при течении с отрывом сверхзвукового пограничного слоя от корпуса модели, так и при обтекании с отошедшей ударной волной из присопловой области струи происходит заброс истекающего газа вверх по потоку на всю длину модели. Это, по-видимому, свидетельствует о том, что и в последнем случае обтекание корпуса дозвуковым потоком за отошедшей головной ударной волной происходит при наличии отрыва пограничного слоя.

Варьирование чисел Рейнольдса в спутном потоке в диапазоне $5 \cdot 10^3 \leqslant Re_\infty / 1$ м$\leqslant 10^5$, осуществлявшееся путем изменения давления торможения и применения различных сопл, показало, что уменьшение Re_∞ слабо влияет на форму отошедшей ударной волны. Согласно данным измерений, уменьшение числа Re_∞ приводит к утолщению отошедшей ударной волны, слоя смешения и висячего скачка. В областях, расположенных между ними, происходит сглаживание градиентов газодинамических параметров. Вязкий сжатый слой при дальнейшем увеличении разреженности принимает диффузную структуру.

Анализ результатов показал, что во всем исследованном диапазоне степеней нерасчетности как при отрывном режиме обтекания, так и при режиме с отошедшей ударной волной в спутном потоке форма ударной волны описывается выражением (3.55), найденным при использовании метода нестационарной аналогии. Этот факт иллюстрируется на представленных фотографиях (см. рис. 3.32) светлыми значками, положение которых вычислено по уравнению (3.55) для $x/X_m \ll 1$

$$y = \{ 2\mathcal{R}\ (x + \Delta_0) \}^{1/2}, \qquad (3.105)$$

где $\mathcal{R}_0$ — радиус кривизны параболической ударной волны на оси симметрии, определяемый выражением (3.54). За величину отхода Δ_0 ударной волны принято известное [35] из теории гиперзвуковых течений соотношение

$$\frac{\Delta_0}{\mathcal{R}_0} = \frac{\varepsilon}{1 + \sqrt{(8/3)\varepsilon}} \qquad (3.106)$$

где $\varepsilon = \varrho_\infty / \varrho_s$ — обратное отношение плотностей на прямом скачке уплотнения.

Такое согласие между предсказываемым методом нестационарной аналогии и наблюдаемой в опытах формой ударных волн можно интерпретировать следующим образом. Набегающий на струю сверхзвуковой поток ($M_\infty > 3$) «воспринимает» последнюю как некоторое эквивалентное затупленное тело с радиусом затупления $\mathcal{R}_{j0}$ С использованием обратного метода [35], в котором форма обтекаемого тела определяется по форме ударной волны, можно получить следующую оценку радиуса такого затупления в виде

$$\mathcal{R}_{j0} = \mathcal{R}(1 - \Delta_0 / \mathcal{R}_0), \qquad (3.107)$$

из которой следует, что при $M_\infty > 3$ $\mathcal{R}_{j0} \approx \mathcal{R}_0$.

Таким образом, величина $\mathcal{R}_0$ является характерным масштабом течения в окрестности выходной кромки сопла. На этом основании для приближенных оценок параметров отрывного течения перед сильно недорасширенной струей ($n>10$) можно использовать данные [66] об обтекании затупления сферической формы с иглой. В качестве радиуса сферического затупления можно в оценках принять значение $\mathcal{R}_0$, определяемое выражением (3.54).

Оценим толщину ламинарного слоя смешения δ на расстояниях от сопла вдоль границы струи порядка $\mathcal{R}_0$. Для этого используем выражение (1.23). В качестве критерия, характеризующего эффекты вязкости и разреженности за отошедшей ударной волной, может быть взято число $\mathrm{Re}_s=\rho_s u_s \mathcal{R}_0/\mu_s$, определенное по параметрам за прямым скачком и радиусу $\mathcal{R}_0$, или близкое к нему при $M_\infty>3$ комбинированное число $\mathrm{Re}_0=\varrho_\infty u_\infty \mathcal{R}_0/\mu_{0\infty}$, в котором $\mu_{0\infty}$ — коэффициент вязкости заторможенного спутного потока, а ϱ_∞ и u_∞ — плотность и скорость невозмущенного спутного потока. Форму границы струи в этой области будем считать сферической, а давление вдоль нее определим по формуле Ньютона. Ограничиваясь случаем больших чисел Маха спутного потока ($M_\infty>3$) и очень больших n учтем, что в этом случае температура газа спутного потока за отошедшей ударной волной ($\approx T_{0\infty}$) много выше, чем температура газа струи на внутренней границе слоя смешения. Для толщины слоя смешения, определяемой по 10%-ному отклонению безразмерной избыточной температуры от своих значений вне слоя смешения, находим

$$\frac{\delta\sqrt{\mathrm{Re}_0}}{\mathcal{R}_0}\approx\left(\frac{\gamma_\infty-1}{\gamma_\infty+1}\right)^{1/4}\left(a+b\frac{\gamma_\infty-1}{\gamma_\infty+1}\frac{\gamma_a}{\gamma_\infty}\frac{T_{0a}}{T_{0\infty}}\right), \tag{3.108}$$

где T_{0a} — температура торможения спутного потока; T_{0a} — температура торможения струи, a и b равны 1,8 и 0,7 при полной толщине слоя смешения струи δ и соответственно 1,3 и 0,35 той части слоя, которая расположена с наружной стороны от невязкой границы.

Толщину слоя смешения, даваемую соотношением (3.108), можно теперь сравнивать с толщиной d_s отошедшей ударной волны, для которой

$$d_s\approx 10\lambda_s,$$

где λ_s — длина свободного пробега молекул, вычисленная по условиям за прямой ударной волной.

Данные результаты позволяют оценить характер режимов течения на расстояниях от среза сопла порядка $\mathcal{R}_0$ в натурных условиях полета на больших высотах. Результаты таких оценок режимов течения при полете типичного ЛА с тягой $5\cdot10^5$ Н и длиной корпуса 5 м представлены на рис. 3.33. На этом рисунке показано изменение по высоте отношения длины l_a корпуса изде-

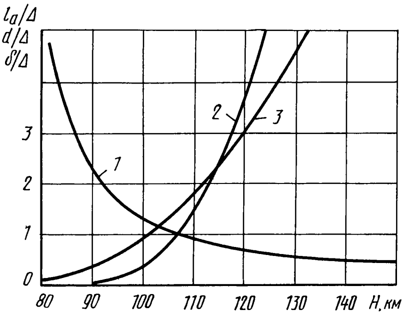


Рис. 3.33 Изменение с высотой отхода Δ и толщины d головной ударной волны и толщины δ слоя смешения:
1 — Δ/l_a, 2 — d/Δ, 3 — δ/Δ

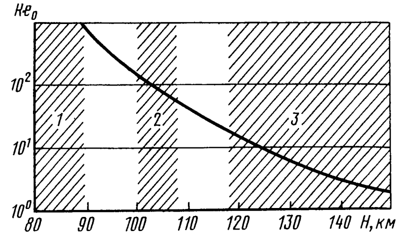


Рис. 3.34. Изменение числа Re_0 по высоте и режимы течения в присопловой части струи:
1 — $d<\delta<\Delta$ — континуум, 2 — $d\sim\delta\sim\Delta$ — вязкий сжатый слой; 3 — $d>\delta>\Delta$ — разреженный режим

лия к величине ударной волны отхода Δ_0, полученной по экспериментально подтвержденному выражению (3.106).

На высотах $H\approx110$ км значение отхода головной ударной волны сравнивается с длиной ЛА. Это указывает на то, что до высоты 100 ... 110 км течение в лобовой части струи происходит при наличии отрыва пограничного слоя на корпусе ЛА, а на высотах, больших 100 ... 110 км, обтекание струи спутным потоком сопровождается отходом головной ударной волны. Таким образом, можно считать, что лобовая часть струи на этих высотах обтекается спутным потоком как некоторое эквивалентное затупленное тело. Это, в свою очередь, позволяет применить в данном случае результаты анализа режимов течения.

Известна классификация режимов течения в окрестности передней критической точки затупленного тела в зависимости от параметра Δ_0/λ_s или (при сферическом затуплении радиусом R_0) в зависимости от числа Re_0 (рис. 3.34).

1. При $\Delta_0/\lambda_s>150$ $\mathrm{Re}_0>700$ течение в сжатом слое за ударной волной континуальное, а толщины ударной волны d_s и пограничного слоя δ малы по сравнению с величиной Δ_0.

2. При $\Delta_0/\lambda_s\approx10\ldots15$ ($\mathrm{Re}_0\approx70\ldots100$) осуществляется режим полностью вязкого течения в сжатом слое, а толщины ударной волны и пограничного слоя оказываются сравнимыми ($\delta+d\approx\Delta$).

3. При $\lambda_s\leqslant\Delta_0\leqslant0{,}5d_s\sim\lambda_\infty(5\leqslant\mathrm{Re}_0\leqslant20)$ наступает режим разрушения ударной волны, заключающийся в том, что сначала вращательные, а затем и поступательные степени свободы молекул не успевают достигать равновесного состояния в окрестности передней критической точки.

На рис. 3.33 показано также изменение по высоте отношения толщины головной волны d_s и «наружной» части толщины слоя смешения δ_e к величине отхода в лобовой части струи. Для оценки толщины ударной волны использовалась экспериментальная величина $d_s = 10\lambda_s$. Толщина δ_e определена по выражению (3.108).

Анализ хода кривых d_s/Δ_0 и δ_e/Δ_0 в зависимости от высоты полета H показывает, что в области высотной струи размером $\mathcal{R}_0$ при $H \geqslant 100$ км происходят явления, аналогичные описанным в окрестности точки затупленного тела. При истечении струи ЛА указанного типа на высоте порядка 110 км, когда величина отхода Δ_0 головной ударной волны примерно равна длине l_a корпуса ЛА, сжатый слой за головной ударной волной вследствие роста толщины d_s и δ_e оказывается полностью вязким. На высотах порядка 130 . . . 140 км наступает такой режим, при котором ударная волна перед лобовой частью струи не успевает сформироваться. На высотах, больших 140 км, осуществляется постепенный переход к такому течению, когда частицы набегающего потока, не испытывая столкновения между собой, будут непосредственно взаимодействовать с частицами истекающей из сопла струи, проникая в область последней на достаточную глубину.

Полученные оценки режимов течения в лобовой части струи не противоречат выводам, приведенным далее, где показано, что на расстояниях от среза сопла порядка X (даже на высотах около 150 км) головная ударная волна, слой смешения и висячий скачок отделены друг от друга зонами почти невязкого течения.

При сопоставлении результатов установлено, что на высотах 120 . . . 150 км характер течения по длине струи значительно изменяется; существенное проявление эффектов разреженности в лобовой части струи постепенно затухает при удалении ее от среза сопла и становится незначительным на расстояниях, сравнимых с размером начального участка струи. Такая картина аналогична явлениям, происходящим при обтекании затупленных тел большого удлинения разреженным гиперзвуковым потоком, в частности, полубесконечной пластины с притупленной передней кромкой.

3.2.3. Структура слоя смешения недорасширенной струи в спутном сверхзвуковом потоке

Когда степень нерасчетности истечения достаточно высока и поперечные размеры струи заметно превышают размеры устройства, из которого вытекает струя (летательный аппарат, модель), тогда взаимодействие спутного потока с этим устройством оказывает слабое влияние на структуру начального участка и в том числе на характеристики слоя смешения. Как показывают опыты, распределения параметров в этом случае при выполнении определенных газодинамических условий приобретают автомодельные свойства, что существенно облегчает описание структуры струи. Для выявления этих свойств рассмотрим некоторые экспериментальные и расчетные данные.

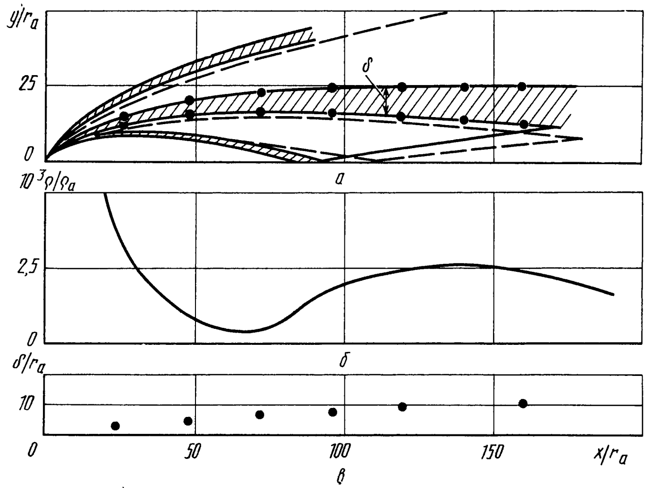
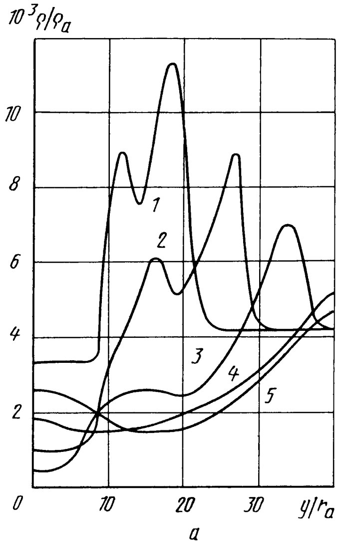


Рис. 3.35. Структура ламинарной недорасширенной струи CO_2, истекающей в спутный поток воздуха ($M_a=2{,}8$; $M_\infty=5{,}9$; $n=530$; $Re_a=6\cdot10^3$; $Re_\infty/1$ м$=8{,}5\cdot10^4$; $T_{0\infty}/T_{0a}=1$; $W_\infty/W_a=1{,}4$):

а — конфигурация ударных волн и слоя смешения; *б* — осевое распределение плотности, *в* — толщина слоя смешения, — — эксперимент, - - - — расчет без учета вязкости ударных волн и слоя смешения в эксперименте заштрихованы

На рис. 3.35, 3.36 представлены экспериментальные данные по структуре ламинарной струи CO_2, истекающей в сверхзвуковой поток воздуха при $M_a=2{,}8$; $M_\infty=5{,}9$; $n=530$. Измерения здесь проведены при помощи электронно-пучкового метода.



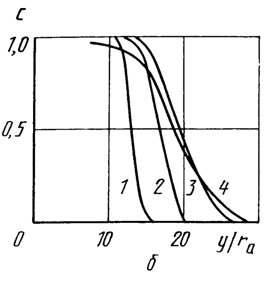


Рис. 3.36. Поперечные распределения плотности в ламинарной недорасширенной струе CO_2, истекающей в спутный поток воздуха ($M_a=2{,}8$; $M_\infty=5{,}9$; $n=530$; $Re_a=6\cdot10^3$; $Re_\infty/1$ м$=8{,}5\cdot10^4$; $T_{0\infty}/T_{0a}=1$; $W_\infty/W_a=1{,}4$):

а — суммарная плотность; *б* — парциальная плотность истекающего газа, кривые 1 . . 5 соответствуют сечениям $x/r_a=24$; 48; 72; 96, 120

Сопло, из которого истекала струя, было смонтировано в донной части цилиндрической модели с коническим носком. Эта модель с помощью боковой державки, служившей одновременно средством подвода газа и измерения давления в модели, устанавливалась на выходе сопла, создающего спутный поток. В целях сведения к минимуму возмущений от державки последняя изготовлялась из двух сплюснутых с боков и спаянных вместе трубок, так что толщина державки в направлении, перпендикулярном направлению потока, составляла величину около 1,6 мм.

На рис. 1.3 представлена фотография визуализации течения в меридиональной плоскости, полученная при возбуждении свечения газа пучком быстрых (25 кВ) электронов. Участки с большей засветкой здесь соответствуют большей плотности газа.

Суммарная плотность измерялась по тормозному рентгеновскому излучению, возбужденному электронным пучком [70], а парциальные плотности CO_2 и воздуха — путем регистрации интенсивностей спектральных линий этих газов. В качестве таких линий были выбраны линия излучения в спектре N_2^+ с длиной волны $\lambda_{N_2}=0{,}3914$ мкм и линия излучения в спектре CO_2 с длиной волны $\lambda_{CO_2}=0{,}4318$ мкм. На линию $\lambda_{N_2}=0{,}3914$ мкм накладывается одна из линий спектра CO_2 с интенсивностью, составляющей 5% от интенсивности линии λ_{N_2}, поэтому результирующая погрешность в определении ρ_i составляла величину 10...20%. При этом погрешность в определении суммарной плотности ρ и относительных распределениях ρ_i/ρ в каждом данном сечении была на уровне 10%.

На рис. 3.35 *а*, *б*, *в* представлены соответственно конфигурации ударных волн и слоя смешения, продольный осевой профиль суммарной плотности и толщина слоя смешения, определенная по 10%-ному отклонению парциальных плотностей ρ_i истекающего газа от своих предельных значений по обе стороны слоя смешения.

Так как в опытах из-за влияния разреженности головной и висячий скачки имели конечную толщину, то на рис. 3.35, *а* их зоны так же, как и зона слоя смешения, показаны в виде заштрихованных участков. Для сравнения здесь пунктиром нанесены конфигурации ударных волн и границы струи, рассчитанные по уравнениям идеального газа. Рис. 3.36, *а* и *б* иллюстрирует поперечные распределения суммарной плотности ρ и парциальные плотности ρ_i в нескольких сечениях $x/r_a=24$, 48, 72, 96, 120.

Результаты одновременного измерения поперечных профилей плотности и температуры в начальном участке проведены для случая истечения воздушной струи в сверхзвуковой поток воздуха при $M_a=2{,}94$, $M_\infty=5{,}65$, $n=360$. Данные измерений для этого режима, выполненных по методу электронного пучка, представлены на рис. 3.37 и рис. 3.38.

На рис. 3.37, *а* дана структура течения и рост толщины слоя смешения в начальном участке, восстановленные по данным

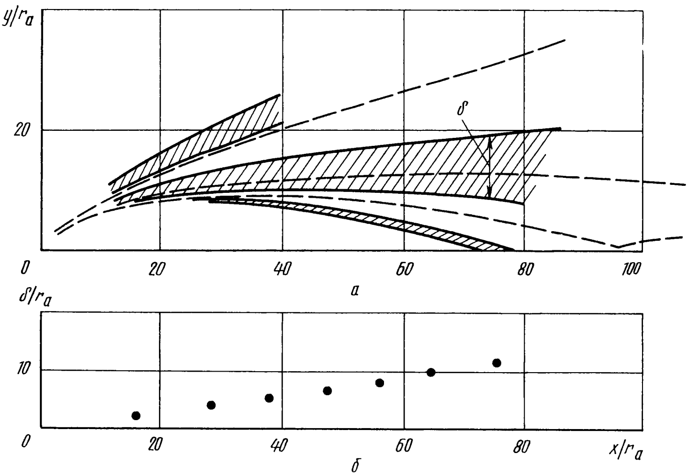


Рис. 3.37. Структура ламинарной недорасширенной воздушной струи, истекающей в спутный поток воздуха ($M_a=2{,}94$; $M_\infty=5{,}65$; $n=360$; $\mathrm{Re}_a=7{,}8\cdot10^3$; $\mathrm{Re}_\infty/1$ м$=4{,}5\cdot10^4$; $T_{0\infty}/T_{0a}=2{,}5$; $W_\infty/W_a=1{,}85$):

а — конфигурация ударных волн и слоя смешения, *б* — толщина слоя смешения, ——— эксперимент, - - - — расчет без учета вязкости; зоны ударных волн и слоя смешения в эксперименте заштрихованы

измерений в ряде сечений струи и по фотографии визуализации. Плотность измерена по регистрации тормозного рентгеновского излучения, возбужденного электронным пучком. Толщина δ слоя смешения здесь определена по характерным точкам максимума и минимума на экспериментальных поперечных профилях плотности в сжатом слое между висячим и головным скачком уплотнения (см. рис. 3.36 и 3.38). Анализ полученных экспериментальных данных показал, что для тех режимов истечения, при которых не наблюдается слияния и перекрытия зон ударных волн и слоя смешения, такое определение δ оказывается близким к находимому по профилям концентрации газа струи в слое смешения, как это выполнено на рис. 3.35.

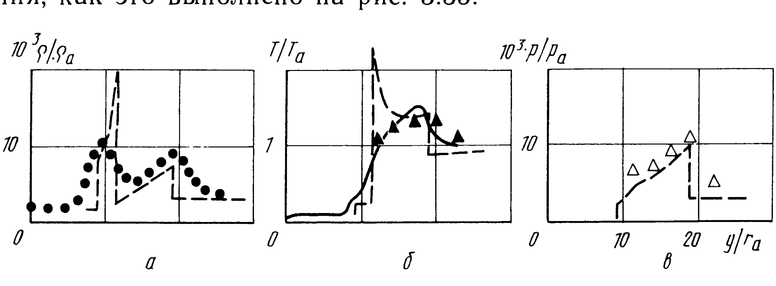


Рис. 3.38. Поперечные распределения плотности *(а)*, температуры *(б)* и давления *(в)* в сечении $x/r_a=37{,}5$ воздушной струи, истекающей в спутный поток воздуха ($M_a=2{,}94$; $n=360$; $\mathrm{Re}_a=7{,}8\cdot10^3$; $\mathrm{Re}_\infty/1$ м$=4{,}5\cdot10^4$; $T_{0\infty}/T_{0a}=2{,}5$; $W_\infty/W_a=1{,}87$):

●, ▲, △ — эксперимент, - - - — расчет без учета вязкости, ——— расчет с учетом вязкости

На рис. 3.38, *а, б* представлены поперечные распределения плотности, температуры вращательных степеней свободы молекул T_R в сечении $x/r_a=37{,}5$. «Вращательная» температура измерена по разработанному Е. Мюнтцем методу регистрации распределения излучения в спектре первой отрицательной системы полос N_2^+, возбужденного электронным пучком (см. работу [70]). В данных условиях уровень плотности в сжатом слое струи является достаточно высоким для установления равновесия между вращательными и поступательными степенями свободы молекул. Поэтому найденные величины вращательной температуры можно надежно отнести к статической температуре T и по известным теперь ρ и T определить распределение статического давления p в данном сечении. Результат такого определения представлен на рис. 3.38, *в*.

Для сравнения на рис. 3.38 пунктиром даны распределения величин ρ, T и p, полученных расчетом без учета вязкости. Наблюдается вполне удовлетворительное соответствие в сравниваемых величинах давления и значительное рассогласование в величинах ρ и T в зоне слоя смешения. В то же время следует отметить вполне удовлетворительное соответствие экспериментальных данных по температуре в сжатом слое с рассчитанными П. К. Осмининым [54] с помощью системы уравнений Навье—Стокса в параболическом приближении (сплошная кривая на рис. 3.38, *б*). Качественно согласуются с приведенными экспериментальными данными и результаты расчетов, выполненных С. Ф. Чекмаревым и П. А. Скovородко по методу интегрирования уравнений параболического приближения работы [64]. В качестве примера на рис. 3.39 представлена структура струи по данным этих расчетов при $M_a=4$, $M_\infty=8$, $n=10^3$ в сравнении со структурой, получающейся по модели идеального газа.

Представленные экспериментальные и расчетные данные для ламинарных струй позволяют выявить ряд общих свойств о влиянии вязких эффектов на структуру начального участка сильно недорасширенной струи.

Первым важным обстоятельством, следующим из представленных данных, является то, что при ламинарном режиме течения существует некоторый диапазон достаточно высоких чисел Рейнольдса, для которого в начальном участке струи ламинарный

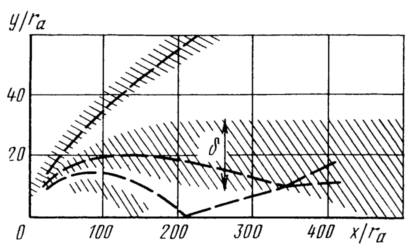


Рис. 3.39. Структура ламинарной недорасширенной струи вязкого газа, истекающей в спутный поток по данным численного расчета [64] ($M_a=4$; $M_\infty=8$; $n=10^3$; $\gamma_a=\gamma_\infty=1{,}4$; $\theta_a=10°$; $\mathrm{Re}_a=2\cdot10^3$; $\mathrm{Pr}=0{,}75$; $W_\infty/W_a=1{,}655$):

- - - — расчет без учета вязкости, заштрихованы зоны ударных волн и слоя смешения (по 20% и 80% прироста полной энтальпии) в расчете с учетом вязкости слой смешения отделен от скачков уплотнения зонами почти невязкого течения. Это дает возможность строить различные расчетные модели с выделением скачков уплотнения, облегчает проведение анализа характеристик слоя смешения и, в частности, его автомодельных свойств вплоть до столь низких значений чисел Рейнольдса, при которых из-за явлений, связанных с разреженностью, происходит смыкание слоя смешения с утолщившимися скачками уплотнения.

Другим важным обстоятельством является уже отмеченное отличие таких параметров, как плотность и температура в зоне слоя смешения от значений этих параметров вблизи границы струи, предсказываемых по теории идеального газа. Здесь же на основании рассмотренных данных следует отметить и отличия параметров от идеальных и в соседних со слоем смешения невязких зонах. Вязкая диссипация в слое смешения, сопровождающаяся переходом кинетической энергии потока в теплоту, изменение в нем профилей скорости, плотности и температуры приводит к смещению линий тока в соседних зонах и перераспределению в них газодинамических параметров. Возникает эффект вязкого взаимодействия, приводящий к оттеснению скачков уплотнения, изменению положения линии тока постоянного расхода $G = G_a$ от линии тангенциального разрыва y_2 в невязком течении. При этом геометрическая конфигурация струи, предсказываемая по теории идеального газа, должна рассматриваться как первое приближение к реальной. Степень отклонения от этого первого приближения обусловливается интенсивностью диссипативных процессов в слое смешения при данном режиме истечения.

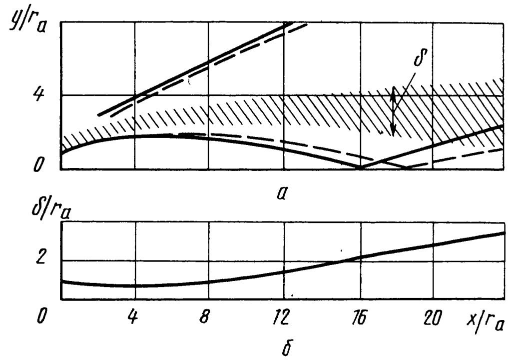
Интересным свойством, обнаруживающемся в представленных экспериментальных и расчетных данных, обладает темп нарастания толщины ламинарного слоя смешения в пределах начального участка струи, обусловленный влиянием кривизны границы и отрицательного градиента давления вдоль нее. Толщина δ возрастает практически линейно с расстоянием от сопла, а ее абсолютная величина зависит от таких определяющих критериев, как степень нерасчетности, числа Маха и Рейнольдса, параметр спутности и температурный фактор.

При известной зависимости δ от этих критериев такой темп нарастания δ вдоль границы струи несомненно дает значительные удобства при проведении анализа течения и в практических оценках.

Качественно аналогичные особенности проявляются и в турбулентной недорасширенной струе. Здесь также турбулентный слой смешения отделен от ударных волн зонами с почти невязким течением. Существенно отклоняются от идеальных параметры в вязком слое смешения. Имеет место эффект вязкого взаимодействия, хотя количественная зависимость его проявления от определяющих критериев отличается от случая ламинарного режима.

Рис. 3.40. Структура турбулентной недорасширенной воздушной струи, истекающей в спутный поток воздуха ($M_a=2{,}56$; $M_\infty=3{,}1$; $n=16$; $Re_a=7\cdot10^5\ldots7\cdot10^6$; $T_{0\infty}/T_{0a}=0{,}55$; $W_\infty/W_a=0{,}8$):

а — конфигурация ударных волн и слоя смешения; *б* — толщина слоя смешения; ______ — эксперимент; ---- — расчет без учета вязкости, зона слоя смешения в эксперименте заштрихована



Близок к линейному и темп нарастания толщины турбулентного слоя смешения.

Для иллюстрации этих особенностей приведем некоторые данные экспериментов и расчетов.

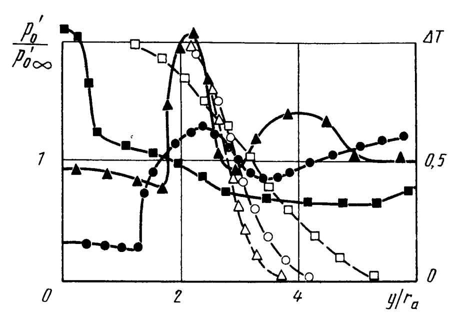
На рис. 3.40 приведена структура начального участка недорасширенной турбулентной воздушной струи, восстановленная [27] по фотографиям визуализации теневым методом и по измерениям насадками полного напора и температуры торможения при $M_a=2{,}56$; $M_\infty=3{,}1$; $n=16$.

Поперечные профили давления в трубке полного напора, отнесенные к аналогичной величине в невозмущенном спутном потоке $p'_{0\infty}$, и безразмерного отношения избыточных температур торможения $\Delta T=(T_0-T_{0\infty})/(T_{0a}-T_{0\infty})$ представлены на рис. 3.41. Приведенные на рис. 3.40 толщины турбулентного слоя смешения определены из экспериментальных профилей ΔT в различных сечениях по значениям, равным 0,1 и 0,9.

Между зоной слоя смешения и ударными волнами в начальном участке имеются зоны, где вязкость мала. Кроме того, за исключением небольшой окрестности вблизи сопла рост δ в начальном участке приближенно линейный. Отклонение от линейной зависимости $\delta\sim x$ вблизи сопла связано с имевшей место в опытах неравномерностью поля скорости в набегающем спутном потоке

Рис. 3.41. Поперечные профили $p'_0/p'_{0\infty}$ (темные значки) и ΔT (светлые значки) в турбулентной струе при $M_a=2{,}56$; $M_\infty=3{,}1$; $n=16$; $Re_a=2\cdot10^6$; $T_{0\infty}/T_{0a}=0{,}55$; $W_\infty/W_a=0{,}8$:

▲, △ — $x/r_a=6$; ●, ○ — $x/r_a=11$, ■, □ — $x/r_a=18{,}5$



вблизи модели из-за конструктивных особенностей экспериментальной установки.

Для получения сверхзвукового спутного потока здесь использовалось сопло с цилиндрическим центральным телом, в донной части которого было смонтировано сопло, из которого выдувалась исследуемая струя. В набегающем на струю потоке на центральном теле нарастал пограничный слой. Его толщина в окрестности среза составляла около полутора радиусов сопла, из которого истекала струя. На внутренних стенках этого сопла также образовывался пограничный слой. Таким образом, влияние неравномерности спутного потока оказалось локализованным вблизи среза сопла на расстоянии, примерно равном $x/r_a=3\ldots4$. Ниже по течению в слой смешения втекают струйки тока, уже невозмущенные пограничными слоями. Их вклад в суммарный расход оказывается при $x/r_a>3$ большим по сравнению с расходом газа, поступившим из пограничных слоев. При этом течение в слое смешения перестает зависеть от неравномерности в начальном сечении и темп его роста стабилизируется.

При рассмотрении результатов исследований течения в начальном участке турбулентных струй расчетными методами следует учитывать то обстоятельство, что в расчеты закладываются эмпирические модели турбулентной вязкости. При этом в работах различных авторов [9, 33, 73] эти модели варьируются. Анализ этих работ показывает, что для описания начального участка турбулентных струй вполне приемлемой является модель, использующая вторую формулу Прандтля. На рис. 1.18, 1.19 было дано сравнение с опытными данными результатов расчета по приближенному методу, в котором осуществлено сопряжение интегрального метода описания слоя смешения с послойным методом характеристик для нахождения газодинамических параметров в зонах невязкого струйного течения. Здесь в качестве модели турбулентной вязкости использовалась вторая формула Прандтля с константой $\varkappa=0{,}02$.

Аналогичная модель использовалась П. К. Осмининым при расчетах с помощью параболического приближения уравнений Навье—Стокса. Некоторые результаты этих расчетов представлены на рис. 3.42 для случая того же режима истечения. Можно видеть неплохое качественное и количественное соответствие.

При расчетах за пределами начального участка в той области, где слой смешения смыкается на оси и, следовательно, меняется тип течения, применение формулы Прандтля с одним и тем же эмпирическим коэффициентом $\varkappa$ приводит к неверным результатам. Ситуация здесь аналогична случаю изобарических струй, анализ которых проведен в работах [14, 58]. При использовании формулы Прандтля для сквозного счета всей струи, включая начальный, переходный и основной участки, необходимо учитывать переменность $\varkappa$. По данным для изобарических струй при

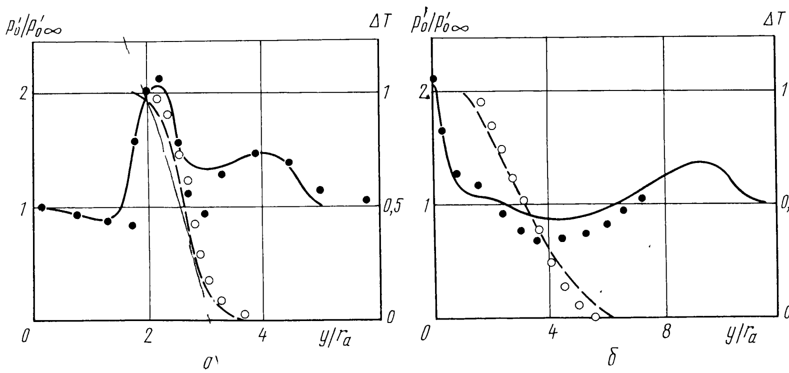


Рис. 3.42. Сравнение экспериментальных профилей $p_0'/p_{0\infty}'$ (темные значки) и ΔT (светлые значки) с результатами расчетов ($p_0'/p_{0\infty}'$ — сплошная кривая, ΔT — пунктир) для режима истечения ($M_a=2{,}56$; $M_\infty=3{,}1$; $n=16$; $Re_a=2\cdot10^6$; $T_{0\infty}/T_{0a}=0{,}55$; $W_\infty/W_a=0{,}8$):

а — $x/r_a=6$, *б* — $x/r_a=18{,}5$

переходе от начального участка к основному величина $\varkappa$ возрастает примерно в 2 раза. Для учета этого в работе [9] дана модификация формулы Прандтля. Проведенные авторами этой модификации расчеты дают для начального участка результаты, согласующиеся с приведенными экспериментальными и расчетными данными.

Учет перестройки типа течения при переходе от начального участка к основному сделан в численном исследовании [73] с помощью использования одной из дифференциальных моделей турбулентности. Некоторые данные, полученные в работах [9, 73], приведены далее (см. рис. 3.57 . . . 3.63).

Одним из наиболее значительных свойств течения в начальном участке сильно недорасширенных турбулентных струй (истекающих в сверхзвуковой спутный поток), выявленных в экспериментальных исследованиях, является свойство их автомобильности по степени нерасчетности и числам Рейнольдса. Это свойство состоит в том, что при заданных значениях критериев M_a, M_∞, γ_a, γ_∞, m, i конфигурация ударных волн и характерных областей начального участка и распределение определенных относительных величин газодинамических параметров в сходственных сечениях $x/(r_a\sqrt{n}\,)$ являются подобными. Причем в пределах турбулентного режима течения такое подобие сохраняется для всего диапазона чисел Рейнольдса.

Здесь и всюду далее имеются в виду приближенные, установленные в пределах погрешности экспериментов автомодельность и подобие.

При анализе свойств струй, предсказываемых по модели идеального газа, было показано, что при увеличении степени нерасчетности распределения параметров в сходственных сечениях струи невязкого газа стремятся к автомодельному виду. Достаточно близкое подобие при этом осуществляется при достаточно больших значениях степени нерасчетности $n \geqslant 10^3$. Наибольшие отклонения от автомодельного вида наблюдаются в области энтропийных слоев вблизи границы струи.

В то же время экспериментами показано, что для заданных значений критериев M_a, M_∞, γ_a, γ_∞, m, i толщина и закон нарастания турбулентного слоя смешения в начальном участке не зависят от степени нерасчетности. Это иллюстрируется на рис. 3.43, где для случая истечения струи воздуха при $M_a=2{,}56$ в сверхзвуковой

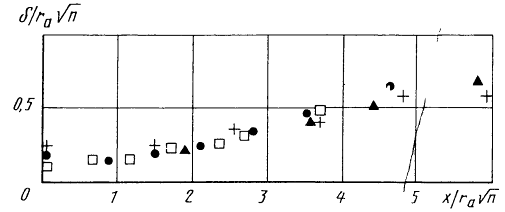


Рис. 3.43. Толщина турбулентного слоя смешения (по 10%-ному отклонению ΔT) при $M_a=2{,}56$; $M_\infty=3{,}1$; $T_{0\infty}/T_{0a}=0{,}55$; $W_\infty/W_a=0{,}8$ и различных n и Re_a:
+ — $n=5{,}3$, ▲ — $n=10$; ● — $n=16$, □ — $n=26$

воздушный поток с числом $M_\infty=3{,}1$ представлен ход нарастания толщины турбулентного слоя смешения для нескольких значений степени нерасчетности и чисел Рейнольдса. Иллюстрация подобия в распределении параметров в струях при тех же режимах истечения приводится на рис. 3.44.

В работах [27, 56] по данным измерений определены поперечные профили безразмерных избыточных скорости $\Delta W=$

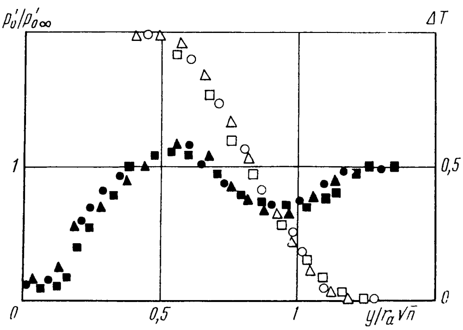


Рис. 3.44. Подобие профилей $p_0'/p_{0\infty}'$ (темные значки) и ΔT (светлые значки) в турбулентной струе при $M_a=2{,}56$, $M_\infty=3{,}1$; $T_{0\infty}/T_{0a}=0{,}55$; $W_\infty/W_a=0{,}8$ в сечении $x/(r_a\sqrt{n})=3{,}5$ для различных n и Re_a:
▲, △ — $n=10$, $\mathrm{Re}_a=1{,}36\cdot10^6$, ●, ○ — $n=16$, $\mathrm{Re}_a=2\cdot10^6$, ■, □ — $n=26$, $\mathrm{Re}_a=3{,}4\cdot10^6$

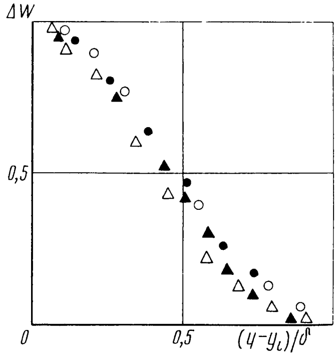


Рис. 3.45. Подобие профилей $\Delta W=(W-W_e)/(W_i-W_e)$ в турбулентном слое смешения по данным экспериментов при $M_a=2{,}56$; $M_\infty=3{,}1$; $T_{0\infty}/T_{0a}=0{,}35$; $W_\infty/W_a=0{,}8$:
●, ○ — $x/(r_a\sqrt{n})=1{,}5$, △, △ — $x/(r_a\sqrt{n})=2{,}15$, ●, ▲ — $n=16$, $\mathrm{Re}_a=2\cdot10^6$ ○, △ — $n=16$, $\mathrm{Re}_a=3{,}4\cdot10^6$

$=(W-W_e)/(W_i-W_e)$ и полной температуры $\Delta T=(T_0-T_{0\infty})/(T_{0a}-T_{0\infty})$ в слое смешения сильно недорасширенных турбулентных струй. Оказалось, что эти профили приближенно могут считаться универсальными функциями. На рис. 3.45 представлены профили для эксперимента, результаты которого представлены на рис. 3.40.

Профили восстановлены по измерениям в двух сечениях струи — $x/r_a\sqrt{n}=1{,}5$, $x/r_a\sqrt{n}=2{,}15$ при $n=16$, $\mathrm{Re}_a=2{,}1\cdot10^6$ и $n=26$, $\mathrm{Re}=3{,}4\cdot10^6$. Здесь по оси абсцисс отложена приведенная координата $(y-y_i)/(y_e-y_i)=(y-y_i)/\delta$, а y_i и y_e — внутренняя и внешняя границы слоя смешения, на которых $W=W_i$ и $W=W_e$ соответственно.

Профили безразмерной избыточной полной температуры ΔT, представленные на рис. 3.46, получены в достаточно широком диапазоне определяющих критериев, указанных в табл. 3.1. В верхней строке этой таблицы x/X_S — расстояние от среза сопла, отнесенное к расстоянию до пересечения висячего скачка на оси, а r_a/r_M — отношение радиуса сопла к радиусу цилиндрической модели.

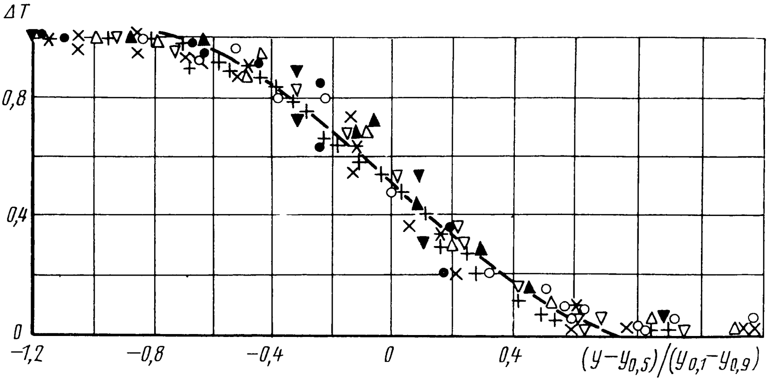


Рис. 3.46. Подобие профилей $\Delta T=(T_0-T_{0\infty})/(T_{0a}-T_{0\infty})$ в турбулентном слое смешения недорасширенных струй, истекающих в сверхзвуковой спутный поток

Таким образом, в турбулентной недорасширенной струе при наличии эффекта вязкого взаимодействия свойства турбулентного слоя смешения и закон нарастания его толщины обеспечивают при любых числах Рейнольдса выполнение двух следующих условий, необходимых для подобия профилей параметров в сходственных сечениях $x/(r_a\sqrt{n})$. Во-первых, выполняется условие подобия конфигураций ударных волн и границ слоя смешения, что обеспечивает подобие распределений параметров в невязких зонах в сходственных сечениях. Во-вторых, выполняется подобие профилей ΔW и ΔT внутри самого слоя смешения. При этом для заданных значений M_a, M_∞, γ_a, γ_∞, m, i оказываются подобными и профили относительных величин плотности, дав-

Таблица 3.1

Обозначение	M_∞	M_a	r_a/r_M	n	x/X_S
*	6	3	0,34	192	0,38
○	6	3	0,67	244	0,2
●	6	3	0,67	22	0,4
▲	6	3	0,67	22	1,5
▼	6	4	0,65	26,6	0,4
△	6	4	0,65	46,1	0,4
▽	6	4	0,65	59,1	1,2
×	6	1	0,22	2610	0,4
+	6	1	0,22	2610	1,1

ления, температуры, скоростного напора и других газодинамических параметров.

Если вернуться к ламинарным сильно недорасширенным струям, то становится ясно, что свойство автомодельности по степени нерасчетности здесь, как и для турбулентного режима, должно включить в себя подобие в конфигурации ударных волн и границ слоя смешения, обеспечивающего, в частности, сохранение постоянства отношений толщин ламинарного слоя смешения к поперечным размерам струй в сходственных сечениях. Поскольку толщина ламинарного слоя смешения зависит от числа Рейнольдса, то в отличие от турбулентного режима автомодельность по этому критерию не выполняется. В подразд. 1.3.3 было показано, что толщина ламинарного слоя смешения может быть выражена через число Рейнольдса $\underline{\mathrm{Re}}_S=\bar{\rho}\,\bar{W}S/\bar{\mu}$, вычисляемое по средним значениям параметров $\bar{\rho}$, $\bar{W}$, $\bar{\mu}$ в слое смешения и по эффективной длине S вдоль границы струи (см. соотношения (1.72) и (1.73)).

По аналогии с рассмотренным в подразд. 2.2.2 случаем истечения в затопленное пространство в качестве характерной величины Re_S можно принять его значение Re_{Sm}, соответствующее сечению $x=X$ начального участка с максимальным радиусом Y.

Теперь, если относительную координату границы представить в виде

$$y_2/Y=\eta_2(\xi),$$

а толщину ламинарного слоя смешения в виде

$$\delta=\frac{AS}{\sqrt{\mathrm{Re}_S}}=\frac{AX}{\sqrt{\mathrm{Re}_{Sm}}}\sqrt{\frac{\mathrm{Re}_{Sm}}{\mathrm{Re}_S}}\frac{S}{X}=\frac{AX}{\sqrt{\mathrm{Re}_{Sm}}}\varphi(\xi),$$

где A — величина, зависящая от параметров, определяющих режим истечения (M_a, M_∞ и т. д.), тогда для отношения δ/y_2 получим

$$\frac{\delta}{y_2} = \frac{A}{\sqrt{\mathrm{Re}_{Sm}}} \frac{X}{Y} \frac{\varphi(\xi)}{\eta_2(\xi)} \sim \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}_{Sm}}}. \tag{3.109}$$

Отсюда следует, что для струй с заданными значениями определяющих критериев M_a, M_∞, γ_a, γ_∞, m, i, но с разными значениями степени нерасчетности n при фиксированной величине Re_{Sm} имеем в сходственных сечениях $\xi = x/X \sim x/r_a\sqrt{n} = \mathrm{const}$ одну и ту же величину отношения δ/y_2.

Для проверки выполняемости автомодельности по степени нерасчетности в распределении параметров для ламинарных струй при $\mathrm{Re}_{Sm} = \mathrm{const}$ были проведены специальные эксперименты, в которых проводились измерения полей плотности и полного напора. Ответ на поставленный вопрос, полученный в этих экспериментах, оказался утвердительным. В качестве иллюстрации этого на рис. 3.47 представлены некоторые из полученных результатов, подтверждающие такое утверждение.

В целях качественного объяснения физических особенностей представленных экспериментальных и расчетных данных о влиянии вязких эффектов получим оценочные соотношения для толщин ламинарного и турбулентного слоя смешения в начальном участке. При этом будем основываться на анализе, проведенном в разд. 1 для случая, когда слой смешения, развивающийся вдоль границы струи $y_2(x)$, отделен от висячего $y_1(x)$ и головного $y_3(x)$ скачков зонами невязкого течения. Течение в слое смешения описывается в криволинейной ортогональной системе координат s, n (s — в направлении потока, n — по нормали к s), связанной с некоторой линией в слое смешения, полагаемой в дальнейшем $y_{0.5}(x) = y(x)$, на которой значения скорости W и полной энтальпии H равны полусуммам соответствующих значений на границах слоя смешения W_i; W_e; $H_i = H_a$; $H_e = H_\infty$.

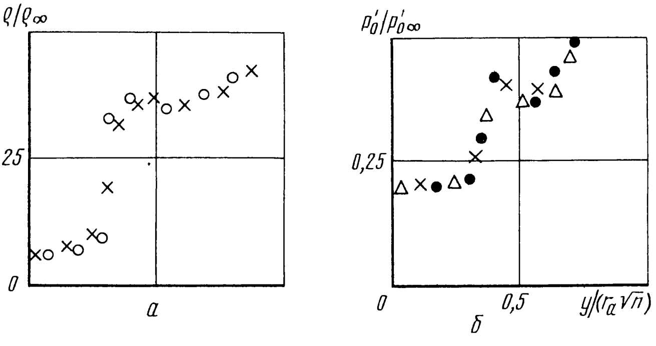


Рис 3.47. Подобие профилей плотности (*а*) и относительного полного напора (*б*) в ламинарной недорасширенной воздушной струе, истекающей в спутный поток воздуха ($\mathrm{M}_a = 1$; $\mathrm{M}_\infty = 3{,}6$, $T_{0\infty}/T_{0a} = 1$; $W_\infty/W_a = 2{,}1$; $\mathrm{Re} = 620$):
а — $x/(r_a\sqrt{n}) = 1{,}75$, $\times$ — $n = 980$; ○ — $n = 5440$, *б* — $x/(r_a\sqrt{n}) = 1{,}4$, $\times$ — $n = 880$, △ — $n = 3210$; ● — $n = 10\,100$

Согласно выражению (3.87)

$$\bar{W}=W_{\max}\frac{1+m_0}{2\sqrt{1+\tau^2}\ \sqrt{1+y'^2}}.$$

Для величины энтальпии $\bar{h}=\bar{H}-\bar{W}^2/2$, соответствующей скорости $\bar{W}$, с использованием предыдущего выражения находим

$$\bar{h}=\frac{H_a}{2}\left\{1+i_0-\frac{\left[\chi_2\sqrt{1+\bar{y}'^2}+m_0\right]^2}{2(1+\tau^2)(1+\bar{y}'^2)}\right\},\qquad(3.110)$$

где $i_0=H_\infty/H_a$.

В сечении струи $x=X$

$$\bar{h}_m=\frac{H_a}{2}\left\{1+i_0-\frac{(\chi_2+m_0)^2}{2(1+\tau^2)}\right\},\qquad(3.111)$$

а при $n>10$, $x=X$

$$\bar{h}_m=\frac{H_a}{4(1-\tau^2)}\left[(1-m_0)^2+2\tau^2(1+i_0)+2(i_0-m_0^3)\right].\qquad(3.112)$$

Применение метода интегральных соотношений вместе с предположением об автомодельности профилей $\Delta W=\Delta H=c=f$ при $\mathrm{Pr}=\mathrm{Sc}=1$ по переменной типа Дородницина—Манглера

$$\varphi=\frac{\bar{y}}{\delta_D}\int\limits_{n_\cdot}^{n}\frac{\varrho}{\varrho_a}\,dn$$

дает следующие (см. (1.72) и (1.76)) выражения для толщин ламинарного δ_l и турбулентного $\delta_т$ слоя смешения

$$\delta_l=k_l\frac{S_l}{\sqrt{\mathrm{Re}_S}}\int\limits_0^1\frac{\bar{\varrho}}{\varrho}\,d\varphi;\qquad(3.113)$$

$$\delta_т=k_т\varkappa S_т\int\limits_0^1\frac{\bar{\varrho}}{\varrho}\,d\varphi,\qquad(3.114)$$

где S_l и $S_т$ — «эффективные» длины вдоль s;

$$S_l=\frac{1}{\bar{\varrho}\bar{W}\bar{\mu}\bar{y}^2}\int\limits_0^s\bar{\varrho}\bar{W}\bar{\mu}\bar{y}^2ds;\qquad(3.115)$$

$$S_т=\frac{1}{\bar{\varrho}\bar{W}\bar{y}}\int\limits_0^s\bar{\varrho}\left|W_i-W_e\right|\bar{y}ds;\qquad(3.116)$$

$$\overline{\mathrm{Re}}_s=\bar{\varrho}\bar{W}S_l/\bar{\mu}$$

— число Рейнольдса по средним параметрам в слое смешения и эффективной длине S_l; $\varkappa$ — эмпирическая константа во второй формуле Прандтля для коэффициента в турбулентной вязкости $\mu_T = \varkappa\rho|W_i - W_e|\Lambda$; k_l и k_T — численные коэффициенты, слабо зависящие от формы профиля $f(\varphi)$, но имеющие различные значения при различных условных определениях толщины δ. Для полной толщины, использующейся в рамках интегрального метода концепции слоя конечной толщины, — $k_l=6{,}1$; $k_т=25$. При определении δ по 5%-ному отклонению профилей $\Delta W=\Delta H=c$ от своих граничных значений — $k_l=4{,}45$; $k_T=18{,}2$, а при определении по 10%-ному отклонению — $k_l=3{,}8$; $k_т=15{,}5$.

Проведем анализ выражений (3.113) ... (3.116) с целью получения приближенных алгебраических формул для величин δ_l и $\delta_т$.

Рассмотрим сначала интегральное выражение

$$J=\int\limits_0^1 \frac{\bar{\varrho}}{\varrho}\,d\varphi.$$

Для вычисления этого интеграла положим в первом приближении, что градиент давления $\partial p/\partial n$ поперек слоя смешения и кривизна линий тока $1/R$ в этом слое постоянны. Тогда из уравнения количества движения в проекции на нормаль n

$$\frac{\varrho W^2}{R}=\frac{\partial p}{\partial n}=\mathrm{const}=\frac{\bar{\varrho}\bar{W}^2}{\bar{R}},$$

откуда $\bar{\varrho}\bar{W}^2=\varrho W^2$ и

$$\frac{\bar{\varrho}}{\varrho}=\frac{W^2}{\bar{W}^2}=\frac{1}{\bar{W}^2}\left[\,(W_i-W_l)^2 f^2(\varphi)+2W_l(W_i-W_l)f(\varphi)+W_l^2\,\right].$$

После интегрирования этого выражения с использованием профиля $f(\varphi)$ в виде (1.64) получаем

$$J(m_0)=\int\limits_0^1 \frac{\bar{\varrho}}{\varrho}\,d\varphi=\frac{1{,}5+m_0+1{,}5m_0^2}{(1+m_0)^2}. \qquad (3.117)$$

При $m_0=1$ $J=1$, а при $m_0=0$ и $m_0\to\infty$ $J=1{,}5$, т. е. видно, что $J(m_0)$ изменяется во всем диапазоне возможных m_0 достаточно слабо.

Далее в выражениях (3.115) и (3.116) для S_l и $S_т$ сделаем ряд приближений упрощающего характера. Такие упрощения оказываются возможными благодаря загрублению зависимостей в присопловой области начального участка струи. Таким образом, получаемые далее результаты будут более точны для расстояний x от среза сопла, сравнимых с характерной длиной X начального участка.

Положим $\mu\sim T$ и выразим $\bar{\varrho}$ на линии $\bar{y}(x)$ через давление $\bar{p}$ и энтальпию $\bar{h}$ на этой же линии

$$\bar{\varrho}=\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}-1}\,\frac{\bar{p}}{\bar{h}}.$$

Из выражений (3.87) и (3.110) следует, что $\bar{W}$ и $\bar{h}$ на линии $\bar{y}(x)$ оказываются практически постоянными в большей части начального участка. Сравнительно небольшие спад $\bar{W}$ и рост $\bar{h}$ имеют место только в присопловом участке. Поэтому будем полагать $\bar{W}$ и $\bar{h}$ постоянными и равными своим значениям $\bar{W}_m$ и $\bar{h}_m$ в сечении струи с максимальной площадью, охватываемой бочкообразной границей $y_2(x)$ (т. е. при $x=X$).

Кроме того, в выражении для элемента длины дуги $ds=\sqrt{1+y'^2}\cdot dx$ будем заменять y' на y_2' и наоборот, поскольку при $x<X$ их величины близки, а при $x>X$ как y', так и y_2' являются малыми по сравнению с единицей, так что здесь $\sqrt{1+\bar{y}'^2}\approx\sqrt{1+y_2'^2}$. Из аналогичных соображений будем также полагать $\bar{y}(x)\approx y_2(x)$; $\bar{p}(x)\approx p_2(x)$.

С учетом отмеченного получаем

$$S_l\approx\sqrt{1+y_2'^2}\,\frac{1}{\bar{p}\bar{y}^2}\int_0^x \bar{p}\bar{y}^2 dx; \tag{3.118}$$

$$S_т\approx 2\sqrt{1+y_2'^2}\,\frac{1}{\bar{p}\bar{y}}\int_0^x \left|\chi_2\sqrt{1+y_2'^2}-m_0\right|\bar{p}\bar{y}dx. \tag{3.119}$$

Далее случаи ламинарного и турбулентного режимов рассмотрим отдельно.

Ламинарный режим. Для вычисления интегрального выражения (3.118) используем выражения (3.65) и (3.77) для границы струи $y_2(x)$ и распределения давления $p_2(x)$. После интегрирования и аппроксимации получаем следующее приближенное выражение для S_l

$$\frac{S_l}{X}=\frac{3}{2}\,\frac{2X+\sqrt{\gamma_\infty}\cdot KL}{4X+\sqrt{\gamma_\infty}\cdot KL}\,\frac{\bar{p}(\xi)}{\bar{p}_m}\,\xi^2. \tag{3.120}$$

В сечении начального участка струи, где $y_2=Y$,

$$\frac{S_{lm}}{X}=\frac{3}{2}\,\frac{2X+\sqrt{\gamma_\infty}\cdot KL}{4X+\sqrt{\gamma_\infty}\cdot KL}.$$

Для толщины ламинарного слоя смешения в пределах начального участка при этом имеем

$$\delta/\delta_m\approx\xi; \tag{3.121}$$

$$\delta_m=k_l J(m_0) S_{lm}/\sqrt{\overline{\mathrm{Re}}_{Sm}}, \tag{3.122}$$

где $\overline{\mathrm{Re}}_{Sm}$ — значение числа $\overline{\mathrm{Re}}_S=\bar{\rho}\bar{W}S_l/\bar{\mu}$ в сечении $x=X$.

Число $\overline{\mathrm{Re}}_{Sm}$, таким образом, носит характер обобщающего параметра, который в основном задает темп нарастания слоя смешения в начальном участке струи. Поэтому представляет интерес нахождение зависимостей числа $\overline{\mathrm{Re}}_{Sm}$ от исходных определяющих параметров.

Наряду с числом $\overline{\mathrm{Re}}_{Sm}$ удобно использовать также число Рейнольдса $\overline{\mathrm{Re}}_X$, построенное по средним параметрам $\bar\rho$, $\bar W$, $\bar\mu$ в слое смешения и характерной длине X: $\overline{\mathrm{Re}}_X=\bar\rho\,\bar W X/\bar\mu$. Имеют место следующие соотношения

$$\overline{\mathrm{Re}}_{Sm}/\overline{\mathrm{Re}}_X=S_{lm}/X,$$

$$\frac{\delta_{lm}}{X}=k_l J(m_0)\left(\frac{S_{lm}}{X}\right)^{1/2}\Big/\sqrt{\overline{\mathrm{Re}}_X}\,. \tag{3.123}$$

Для удобства нахождения $\overline{\mathrm{Re}}_{Sm}$ или $\overline{\mathrm{Re}}_X$ найдем их связь с параметрами на срезе сопла и в невозмущенном спутном потоке. Для $\overline{\mathrm{Re}}_X$ имеем

$$\overline{\mathrm{Re}}_X=\left(\frac{\gamma_\infty-1}{\bar\gamma-1}\,\frac{\bar\gamma}{\gamma_\infty}\right)\left(\frac{\bar c_p}{c_{p_\infty}}\right)^{\omega}\left(\frac{h_\infty}{\bar h}\right)^{\omega+1}\times$$

$$\times\frac{\bar W_m}{W_\infty}\left(\frac{L}{X}\right)^2\mathrm{Re}_{\infty X}, \tag{3.124}$$

а также

$$\overline{\mathrm{Re}}_X=\left(\frac{\gamma_a-1}{\bar\gamma-1}\,\frac{\bar\gamma}{\gamma_a}\right)\left(\frac{\bar c_p}{c_{pa}}\right)^{\omega}\times$$

$$\times\left(\frac{h_a}{\bar h}\right)^{\omega+1}\frac{W_m}{W_a}\,\frac{L}{X}\,(\gamma_a\mathrm{M}_a^2+1)^{1/2}\frac{\mathrm{Re}_a}{\sqrt{n}}, \tag{3.125}$$

где

$$\mathrm{Re}_{\infty X}=\varrho_\infty W_\infty X/\mu_\infty;\qquad \mathrm{Re}_a=\varrho_a W_a r_a/\mu_a;$$

ω — показатель в степенном законе вязкости $\mu\sim T^{\omega}$.

Соотношения (3.124) и (3.125) показывают, что если (как это обычно делается в расчетных исследованиях [9, 32, 33]) в исходных данных фиксировать, например, число Re_a, то в отличие от случая $\overline{\mathrm{Re}}_{Sm}=\mathrm{const}$ толщина ламинарного слоя смешения δ_l будет также существенно зависеть еще от таких параметров, как n, m_0, i_0 и др. Если сравнивать два режима истечения с одинаковыми числами Re_a, но различными значениями n, m_0, i_0 и другими, то при анализе можно сделать неверные заключения, поскольку значения критериев $\overline{\mathrm{Re}}_{Sm}$, определяющих толщину слоя смешения, могут оказаться различными вплоть до возможности перехода от ламинарного режима к режимам с разреженностью или, наоборот, к турбулентному режиму. Отсюда также следует, что при проведении численных расчетов, задаваясь такими параметрами, как n, M_∞, M_a, Re_a и другими и используя алгоритм для ламинарного течения, необходимо по оценке критерия $\bar{Re}_{Sm}$ предварительно убедиться в том, что течение в начальном участке струи будет ламинарным.

Обобщающий характер критерия Re_{Sm} был проиллюстрирован данными прямых экспериментов. Проведем теперь количественное сравнение результатов, даваемых формулами для толщины ламинарного слоя смешения с приведенными экспериментальными данными.

Вычислим толщину δ_l в сечении $x=X$ для режима истечения, соответствующего рис. 3.35 и 3.36 ($n=530$; $M_\infty=5{,}9$; $M_a=2{,}8$; $Re_a=6\cdot 10^3$). Значения некоторых промежуточных при вычислении δ_l параметров здесь оказываются следующими: $m_0=1$; $i_0=1{,}38$; $\theta=0{,}48$; $K=2{,}84$; $L=0{,}1$ м; $X/r_a=60$; $Y/r_a=15{,}4$; $\tau=0{,}256$; $W_m/W_\infty=0{,}91$; $h/h_a=0{,}364$; $S_{lm}/X=1{,}15$; $Re_X=7{,}4\cdot 10^3$.

Для толщины слоя смешения, определенной по 10%-ному отклонению профилей концентрации CO_2, находим $\delta_{lm}/r_a=3{,}2$, что достаточно близко к экспериментально определенной толщине $\delta_{lm}/r_a=4$.

Турбулентный режим. В этом случае упрощения при вычислении выражения $\int\limits_0^x \left|\chi_2 \sqrt{1+y_2'^2} - m_0\right| \bar{p}\bar{y}dx$ следует делать более осторожно из-за наличия модуля разности двух величин, которые в определенных случаях могут оказаться сравнимыми. Такие случаи получаются при значениях параметра спутности m_0, близких к единице. При этом разность под знаком модуля может менять свой знак с положительного на отрицательный при удалении от сопла. Поэтому здесь следует рассматривать ряд диапазонов по параметру m_0

1. $m_0<\chi_2$ ($\chi_2\to 1$ при $n\to\infty$).

В данном случае на всей длине начального участка имеем

$$W_i>W_e,$$

$$\left|\chi_2 \sqrt{1+y'^2} - m_0\right| = \chi_2 \sqrt{1+y_2'^2} - m_0 > 0.$$

Подставляя в выражение (3.119) уравнение границы струи $y_2(x)$ и распределение давления $p_2(x)$, проводя интегрирование, получаем после аппроксимации следующее выражение для толщины турбулентного слоя смешения в пределах начального участка:

$$\delta/\delta_m \approx (\xi+\xi^2/2)\,\frac{2}{3}; \tag{3.126}$$

$$\frac{\delta_{\text{т}m}}{X} = \frac{3}{4} k_{\text{т}} \frac{J(m_0)}{(1+m_0)} \varkappa \left\{ (1-m_0) \frac{4X+3\sqrt{\gamma_\infty}\cdot KL}{4X+\sqrt{\gamma_\infty}\,KL} + \right.$$

$$\left. + \frac{\theta^2}{3\tau^{3/4}} \right\}. \tag{3.127}$$

2. $m_0 > \chi_2 \sqrt{1+y_2'^2(0)}$, $(y_2'(0) = \operatorname{tg}\alpha_0$

— тангенс угла наклона границы $y_2(x)$ у сопла.

В этом случае на всей длине начального участка $W_e > W_i$.

После аналогичных операций получаем для $\delta_{\text{т}m}$

$$\frac{\delta_{\text{т}m}}{X} = \frac{3}{4} k_{\text{т}} \varkappa \frac{J(m_0)}{(1+m_0)} \left\{ (m_0 - 1) \frac{4X + 3\sqrt{\gamma_\infty} \cdot KL}{4X + \sqrt{\gamma_\infty} \cdot KL} - \frac{\theta^2}{3\tau^{3/4}} \right\}. \tag{3.128}$$

3. $W_i(x) > W_e(x)$ при $x < x_1 < X$, но $W_i(x) < W_e(x)$ при $x > x_1$. Здесь при $x = x_1 < X$ имеем $|W_i - W_e| = 0$.

Вычисления приводят к следующему приближенному выражению, которое, несмотря на более сложную структуру, является более грубой оценкой по сравнению с двумя предыдущими в связи с уже упомянутыми обстоятельствами

$$\frac{\delta_{\text{т}m}}{X} = \frac{3}{4} k_{\text{т}} \varkappa \frac{J(m_0)}{(1+m_0)} \left\{ (m_0 - 1) \frac{4X + 3\sqrt{\gamma_\infty} \cdot KL}{4X + \sqrt{\gamma_\infty} \cdot KL} - \frac{\theta^2}{3\tau^{3/4}} + \frac{4}{3} \frac{W_{im}}{U} \frac{1}{\tau} \left[\alpha_0 + \sqrt{m_0^2 - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{m_0^2 - 1} - m_0 \sin\alpha_0 \right] \right\}. \tag{3.129}$$

Из рассмотренных трех случаев наиболее часто реализующимся в практике оказывается первый, соответствующий $W_i > W_e$. Случай, отвечающий $W_e > W_i$, обычно осуществляется, когда режим течения становится уже ламинарным или даже разреженным.

Сравним результаты вычислений по формуле (3.127) с данными экспериментов, которые приведены на рис. 3.40 . . . 3.45 ($n=16$; $\text{M}_a = 2{,}56$; $\text{M}_\infty = 3{,}1$). Значения ряда промежуточных при вычислении $\delta_{\text{т}}$ параметров здесь оказываются следующими: $m_0 = 0{,}585$; $i_0 = 0{,}53$; $\theta = 0{,}41$; $K = 1{,}28$; $L/r_a = 12{,}7$; $X/r_a = 12{,}7$; $Y/r_a = 4{,}2$; $\tau = 0{,}33$; $W_m/W_a = 0{,}97$; $h_m/h_a = 0{,}52$.

Для толщины δ_m слоя смешения при $x = X$ (определяемой по 10%-ному отклонению ΔT_0 от своих граничных значений) получаем $\delta_m/r_a = 56\varkappa$, что дает значение, согласующееся с экспериментом при выборе эмпирической постоянной $\varkappa = 0{,}019$.

Приведенные здесь зависимости для определения толщин ламинарного и турбулентного слоев смешения с приемлемой для оценок точностью сводятся при $\text{M} \to 0$ к полученным ранее в разд. 2.

Для приближенного определения конфигурации слоя смешения можно воспользоваться результатами экспериментов [27, 56] и численных расчетов работы [9]. Согласно данным этих работ «средняя» линия $y_{0,5}(x)$ слоя смешения имеет следующую конфигурацию: при $x \leqslant X$ она близка к невязкой границе $y_2(x)$, а при $x \geqslant X$ имеет место $y_{0,5}(x) = \bar{y}(x) \approx Y = \mathrm{const}$.

Данная особенность иллюстрируется на рис. 3.48 результатами численных расчетов, проведенных авторами по изложенному в подразд. 1.3.3 методу для случая турбулентного режима течения в слое смещения. Здесь конфигурация линии $\bar{y}(x) = y_{0,5}(x)$ для различных режимов истечения представлена в координатах, отнесенных к характерным размерам X и Y. Отметим, что данные по толщинам слоя смешения, полученные в этих расчетах, удовлетворительно согласуются с приведенными оценочными соотношениями.

Нарастание вязкого (турбулентного или ламинарного) слоя смешения приводит к явлению вязкого взаимодействия, проявляющегося в перераспределении параметров в прилегающих к слою смешения зонах и к оттеснению скачков уплотнения. Это явление исследовалось экспериментально и с помощью численных расчетов. Результаты этих исследований показали, что вязкая диссипация, протекающая в слое смешения при наличии разности скоростей спутного потока и струи, приводит к оттеснению висячего скачка $y_1(x)$ в направлении к оси струи, а головной ударной волны $y_3(x)$ — от оси струи. При значениях параметра спутности m_0, близких к единице, эффект оттеснения становится пренебрежимо малым. Величина этого эффекта также является сложной функцией таких параметров, как n, M_a, M_∞, m_0, Re и др.

Рассмотрим результаты исследования этого эффекта для турбулентного режима, полученные в ходе проведения серии расчетов по методу, изложенному в подразд. 1.3.3 и основанному на сопряжении интегрального описания слоя смешения с расчетом параметров в невязких зонах послойным методом характеристик.

На рис. 3.49 показано изменение расстояния X_S от среза сопла до пересечения висячего скачка с осью струи в зависи-

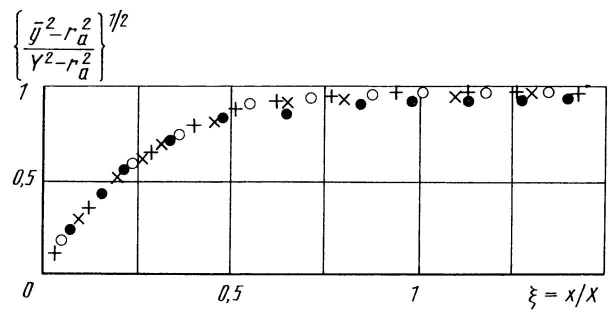


Рис. 3.48. Автомодельность линии $\bar{y}(x) = y_{0,5}(x)$ слоя смешения в начальном участке турбулентной сильно недорасширенной струи:

● — $n=8{,}9$; $M_a=2{,}7$, $\gamma_a=1{,}27$, $M_\infty=4{,}25$; $\gamma_\infty=1{,}4$, $m_0=0{,}317$, x — $n=220$, $M_a=2{,}6$; $\gamma_a=1{,}3$, $M_\infty=6$, $\gamma_\infty=1{,}4$, $m_0=0{,}67$, ○ — $n=440$, $M_a=3$, $\gamma_a=1{,}27$, $M_\infty=10$; $\gamma_a=1{,}4$, $m_0=0{,}62$, + — $n=8860$, $M_a=3$, $\gamma_a=1{,}27$, $M_\infty=8{,}2$, $\gamma_\infty=1{,}4$, $m_0=0{,}73$

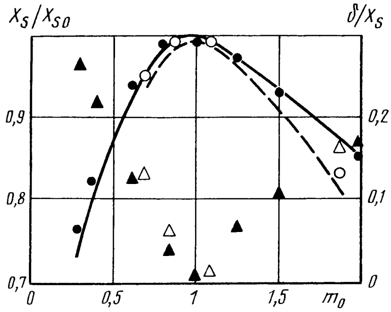


Рис. 3.49. Длина висячего скачка уплотнения и толщина турбулентного слоя смешения в сечении $x=X_S$:
——, ● — X_S/X_{S0}, ▲ — δ/X_S при $n=16$, $M_a=2{,}56$, $M_\infty=3{,}1$; $\gamma_a=\gamma_\infty=1{,}4$; $X_{S0}/r_a=19$,
-----, 0 — X_S/X_{S0}, △ — δ/X_S при $n=200$; $M_a=4$, $M_\infty=6$; $\gamma_a=\gamma_\infty=1{,}4$; $X_S/r_a=100$; значки — численный расчет; кривые — расчет по формулам (3.140) и (3 138)

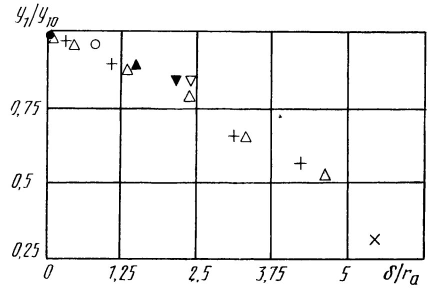


Рис. 3.50. Оттеснение висячего скачка в зависимости от толщины турбулентного слоя смешения при $n=16$; $M_a=2{,}56$; $M_\infty=3{,}1$; $\gamma_a=\gamma_\infty=1{,}4$ и различных значениях m_0:
× — $m_0=0{,}29$; △ — $m_0=0{,}376$; ▽ — $m_0=0{,}6$; ○ — $m_0=0{,}81$, ● — $m_0=0{,}996$, ▲ — $m_0=1{,}25$; ▼ — $m_0=1{,}5$; + — $m_0=2$

мости от параметра $m_0=W_\infty/W_{\max}$. При этом расстояние X_S отнесено к соответствующему расстоянию X_{S0} в случае струи невязкого газа. Здесь же представлена зависимость от параметра m_0, отношения толщины $\delta_т$ слоя смешения в сечении $x=X_S$ к расстоянию X_S, позволяющая выявить вполне определенную корреляцию между величинами X_S/X_{S0} и δ/X_S.

Здесь приведены результаты двух серий расчетов. Для первой серии имело место $n=16$; $M_a=2{,}56$; $M_\infty=3{,}1$; $\gamma_a=\gamma_\infty=1{,}4$, а для второй: $n=200$; $M_a=4$; $M_\infty=6$; $\gamma_a=\gamma_\infty=1{,}4$. Значения параметров спутности и энтальпийного фактора $i_0=H_\infty/H_a$ для первой серии были соответственно равны: $m_0=0{,}29$; 0,38; 0,6; 0,81; 0,99; 1,25; 1,5; 2; $i_0=0{,}127$; 0,217; 0,545; 1,02; 1,51; 2,41; 3,45; 6,34; для второй — $m_0=0{,}7$; 0,83; 1,07; 1,85; $i_0=0{,}565$; 0,78; 1,3; 3,9.

Оттеснение висячего скачка в зависимости от толщины турбулентного слоя смешения в диапазоне $0{,}29\leqslant m_0\leqslant 2$ иллюстрируется на рис. 3.50. Здесь для сечения $x/r_a=13{,}5$ показано изменение отношения ординаты y_1 висячего скачка к соответствующей величине y_{10} в невязкой струе в зависимости от толщины $\delta_т$ в том же сечении. Результаты показывают, что для любого значения m_0 из указанного диапазона величины y_1/y_{10}, характеризующие оттеснение висячего скачка, практически одинаково зависят от величины δ. Для подтверждения данного факта были проведены две специальные серии расчетов при существенно различных значениях $m_0=0{,}3$ и $m_0=2$, в которых искусственным способом (введением коэффициента, равного 0,025; 0,1; 0,25; 0,5, в выражение 1.76) варьировалась толщина слоя смешения по всей длине начального участка струи. Результаты этих расчетов также представлены на рис. 3.50.

Проведенные расчеты показали, что значительный рост толщины турбулентного слоя смешения, связанный с отклонением значения параметра m_0 от 1, приводит к вовлечению в диссипативный процесс вязкого перемешивания значительной доли расхода струи $G_{i\delta}/G_a = 2\pi \int\limits_{y_i}^{y_e} c\varrho u y dy/G_a$ (рис. 3.51).

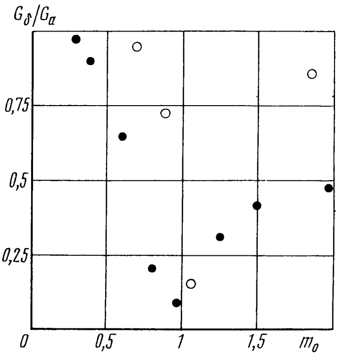


Рис. 3.51. Расход газа в турбулентном слое смешения в сечении $x/X = 1{,}25$:
● — $n=16$; $M_a=2{,}56$, $M_\infty=3{,}1$, $\gamma_a=\gamma_\infty=1{,}4$, ○ — $n=200$; $M_a=4$, $M_\infty=6$, $\gamma_a=\gamma_\infty=1{,}4$

Анализ результатов расчетов и экспериментов показывает, что в результате влияния вязкости характерные продольные и поперечные размеры линии $y(x)$ постоянного расхода $G=G_a$, а также ударно-волновой структуры начального участка изменяются неодинаково по отношению к своим соответствующим величинам в невязком течении. Это обстоятельство можно интерпретировать различной интенсивностью диссипации продольной и поперечной составляющих кинетической энергии газа струи, приводящей к изменению характерного угла течения θ в начальном участке по отношению к значению θ_0 в невязком течении.

Если геометрическую форму вязкой струи представить в координатах x/X_0, y/Y_0, где X_0 — расстояние до максимального сечения начального участка, а Y_0 — радиус этого сечения в невязком течении, то обнаруживаются отклонения от автомодельности при различных значениях безразмерных критериев, характеризующих эффекты вязкости (число Рейнольдса, параметр спутности и др.). В то же время отнесение геометрической формы линий $y_1(x)$, $y(x)$, $y_3(x)$, $y_4(x)$ к соответствующим образом измененным характерным размерам X и Y приводит в первом приближении к автомодельной форме начального участка в новых безразмерных координатах x/X и y/Y. Таким образом, вязкая струя может быть приближенно заменена некоторой эквивалентной невязкой струей, ограниченной поверхностью вращения с образующей $y(x)$ и имеющей геометрическую форму, аффиноподобную струе идеального газа с исходными параметрами n, M_a, M_∞, γ_a, γ_∞.

Применим данный подход для качественного анализа результатов расчетных и экспериментальных исследований вязкого взаимодействия со сверхзвуковым спутным потоком. В рамках такого подхода требуется сделать оценки влияния вязкости на характерные размеры X и Y и характерный угол течения θ. В целях простоты соответствующих выкладок будем в основном ограничиваться случаями достаточно больших степеней нерасчетности ($n>10$), больших чисел Маха на срезе сопла ($M_a>2$) и гиперзвуковых чисел Маха спутного потока ($M_\infty>3$). Используем также некоторые исходные моменты, сформулированные в подразд. 2.2.5, при проведении подобных оценок для случая истечения сильно недорасширенной струи в затопленное пространство.

Поскольку вязкую струю заменяем эквивалентной невязкой струей с границей $\tilde{y}(x)$, то в данном анализе можно использовать соотношения, полученные ранее с помощью метода нестационарной аналогии, выбрав некоторые средние в пределах начального участка с учетом вязкости и теплопроводности характерную скорость $U=\text{const}$ и полную энтальпию $\langle H\rangle=\text{const}$ потока, ограниченного поверхностью $y(x)$.

Как в подразд. 2.2.5, примем для U соотношение (2.103)

$$U=U_0\left[1+F_m/(G_aU_0)\right],$$

где F_m — суммарная сила трения на участке $0\leqslant x<X_0$, вычисляемая вдоль поверхности постоянного расхода с образующей $\tilde{y}(x)$. Видно, что при значениях параметра спутности меньших и больших единицы получаем соответственно $U<U_0$ или $U>U_0$.

При выборе среднего на участке $0\leqslant x\leqslant X_0$ значения $\langle H\rangle$ необходимо учесть количество теплоты, которой эквивалентная струя обменивается со спутным потоком через поверхность $\tilde{y}(x)$. В соответствии с выражениями (2.105) и (2.106) принимаем

$$\langle H\rangle=\frac{2\pi}{G_a}\int\limits_0 \varrho uHydy=H_a+\frac{\Phi_m}{G_a}=H_a+\frac{H_\infty-H_a}{W_\infty-W_{\max}}\,\frac{F_m}{G_a}.$$

Для характерного угла течения

$$\theta=\left[(2\langle H\rangle-U^2)/2U^2\right]^{1/2}\chi^{1/2},$$

изменение которого по сравнению с $\theta_0=\left[(2H_a-U_0^2)/2U_0^2\right]^{1/2}\chi_1^{1/2}$ выражает различный темп диссипации поперечной и продольной составляющих кинетической энергии газа струи, имеем в соответствии с подразд. 2.2.5 выражение

$$\frac{\theta}{\theta_0}=1+\frac{1}{2}\,\frac{H_a}{i_a}\,\frac{i_0-2m_0+1}{m_0-1}f_m, \tag{3.130}$$

где $m_0=W_\infty/W_{\max}$; $i_0=H_\infty/H_a$;

$$f_m=\frac{F_m}{G_aU_0}=\frac{2\pi}{G_aU_0}\int\limits_0^{X_0}\bar{\mu}\,\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\,\tilde{y}dx. \tag{3.131}$$

Выражение (3.130) получено после преобразований, в которых с целью упрощения использовано условие $|f_m|\ll 1$.

Представляет интерес следующее замечание относительно параметра

$$i_0=\frac{H_\infty}{H_a}=\frac{2h_\infty+W_\infty^2}{W_{\max}^2}=m_0^2\left(1+\frac{2}{(\gamma_a-1)M_\infty^2}\right)$$

При гиперзвуковых значениях числа M_∞ спутного потока, когда $2h_\infty \ll W_\infty^2$, этот параметр вырождается, поскольку в этом случае $i_0 \approx m_0^2$. Выражение (3.130) тогда приводится к виду

$$\frac{\theta}{\theta_0}-1=\frac{1}{2}\frac{H_a}{e_a}(m_0-1)f_m. \qquad (3.132)$$

Найдем приближенные аналитические выражения для параметра $f_m=F_m/G_aU_0$, характеризующего отношение суммарных вязких и инерционных сил на участке $0 \leqslant x < X_0$. Для упрощения преобразований положим $(\partial\bar{u}/\partial y)=(W_e-W_i)/\delta$, где δ определено по 10%-ному отклонению безразмерных избыточных скоростей и полных энтальпий от своих значений в прилегающих невязких зонах течения. Будем считать, что уравнение линии постоянного расхода $\tilde{y}(x) \approx \bar{y}(x)$ на участке $0 \leqslant x \leqslant X_0$ и совпадает с уравнением (3.66) границы невязкой струи. Для оценки величины статической энтальпии h на линии $\tilde{y}(x) \approx \bar{y}(x)$ примем выражение (3.110), соответствующее значению безразмерной избыточной энтальпии торможения, равному 0,5. Кроме того, чтобы избежать громоздких выражений, ограничимся рассмотрением случаев, когда параметр спутности m_0 не слишком близок к единице. После преобразований получаем

$$f_m=\varsigma\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}-1}\frac{\tau_0(m_0-1)}{\left[(1-m_0)^2+2\tau_0^2(1+i_0)+2(i_0-m_0^2)\right]}, \qquad (3.133)$$

це для турбулентного слоя смешения

$$\varsigma=\varsigma_т=3\varkappa\frac{\left[1-m_0\right|(3+2m_0+3m_0^2)}{(1+m_0)^2}\frac{4X+3\sqrt{\gamma_\infty}\cdot KL}{4X+\sqrt{\gamma_\infty}\cdot KL}, \qquad (3.134)$$

для ламинарного слоя смешения

$$\varsigma=\varsigma_l=7{,}5\frac{(1+m_0)^2}{(3+2m_0+3m_0^2}\left[\frac{4X+\sqrt{\gamma_\infty}\cdot KL}{2X+\sqrt{\gamma_\infty}\cdot KL}\right]^{1/2}\frac{1}{\sqrt{\bar{R}e_X}} \qquad (3.135)$$

Если параметр спутности m_0 заметно отличается от единицы, числа M_a и M_∞ столь велики, что можно полагать $i_0=m_0^2$ и пребречь из-за малости τ_0^2 величиной $2\tau_0^2(1+m_0^2)$ по сравнению с $-m_0)^2$, то выражение для параметра f_m существенно упроается:

$$f_m=\varsigma\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}-1}\frac{\tau_0}{(m_0-1)} \qquad (3.136)$$

и выражение для θ принимает вид

$$\frac{\theta}{\theta_0}-1=\frac{1}{2}\varsigma\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}-1}\frac{H_a}{e_a}\tau_0 . \qquad (3.137)$$

Из выражений (3.132) ... (3.137) следует, что величина $(\theta/\theta_0)-1$ является неотрицательной, а также, что влияние вязкости приводит к увеличению характерного угла течения θ по сравнению с его величиной в невязком газе. Иными словами, доля диссипированной продольной составляющей кинетической энергии превосходит соответствующую долю поперечной составляющей. Это объясняется тем, что значительные по величине скорости поперечного движения реализуются только в прилегающей к соплу зоне струи, где в процесс вязкого перемешивания вовлечена еще малая доля от полного расхода струи. И наоборот, продольное движение является преимущественным видом движения практически по всей длине и в том числе и в той ее значительной по протяженности части, где в процессе вязкого перемешивания вовлекается значительная доля от полного расхода струи.

Оценку влияния вязкости на характерные размеры X и Y теперь достаточно просто сделать с помощью формул (3.71), (3.73) ... (3.76), отвечающих случаю $K\gg 1$.

Имеем

$$X=\frac{4L}{\sqrt{\gamma_\infty}\,K}=\frac{4}{M_\infty}\sqrt{\frac{G_a}{\pi\gamma_\infty p_\infty}\frac{\sqrt{U}}{\theta}},$$

$$Y=\tau X=\frac{\sqrt{5}}{6}\theta X=\frac{2\sqrt{5}}{3M_\infty}\sqrt{\frac{G_a}{\pi\gamma_\infty p_\infty}\sqrt{U}}$$

Для отношения этих величин к своим значениям в невязком течении находим

$$\frac{X}{X_0}=\frac{\theta_0}{\theta}\left(\frac{U}{U_0}\right)^{1/2},\quad \frac{Y}{Y_0}=\left(\frac{U}{U_0}\right)^{1/2}. \qquad (3.138)$$

Используя свойство подобия ударно-волновой структуры струи при $n\gg 1$ в координатах x/X и y/Y, согласно которому для длины висячего скачка X_S по оси x и его максимального радиуса Y_S имеет место

$$X_S=\xi_S X\approx 1{,}7X;\; Y_S=\eta_{Sm}Y\approx 0{,}75Y$$

и в то же время

$$X_{S0}=\xi_S X_0\approx 1{,}7X_0;\quad Y_{S0}=\eta_S X_0\approx 0{,}75Y_0,$$

получаем

$$\frac{X_S}{X_{S0}}=\frac{\theta_0}{\theta}\left(\frac{U}{U_0}\right)^{1/2};\; \frac{Y_S}{Y_{S0}}=\left(\frac{U}{U_0}\right)^{1/2} \qquad (3.139)$$

После ряда преобразований, в которых используем предположение $|f_m| \ll 1$, находим, что последние выражения представляются в виде

$$\frac{X_S}{X_{S0}} = \frac{X}{X_0} = 1 + \frac{1}{2} f_m \left(1 - \frac{H_a}{e_a} \frac{i_0 - 2m_0 + 1}{(m_0 - 1)} \right); \tag{3.140}$$

$$\frac{Y_S}{Y_{S0}} = \frac{Y}{Y_0} = (1 + f_m)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} f_m. \tag{3.141}$$

Проанализируем полученные соотношения. Параметр $f_m = F_m / G_a U_0$, характеризующий вязкое трение в слое смешения, принимает как отрицательные, так и положительные значения в зависимости от знака разности $(m_0 - 1)$, при $m_0 < 1$ $f_m < 0$ и, наоборот, при $m_0 > 1$, $f_m > 0$. Таким образом, при истечении в гиперзвуковой спутный поток характерные поперечные размеры вязкой струи Y и Y_S могут как уменьшаться (при $m_0 < 1$), так и возрастать по сравнению со своими значениями Y_0 и Y_{S0} в невязкой струе. Благодаря тому, что абсолютная величина f_m обычно мала, этот эффект также является малым.

Иная ситуация получается для продольных размеров X и X_S. Из анализа выражения (3.140) следует, что как при $m_0 > 1$, так и при $m_0 < 1$ эти размеры уменьшаются по сравнению с X_0 и X_{S0}, т. е. наиболее удаленная от сопла часть висячего скачка под воздействием вязкости оттесняется к оси. При этом вся бочкообразная структура укорачивается. Для того чтобы более наглядно пояснить этот момент, представим с помощью выражения (3.130) соотношение (3.140) в следующей форме

$$\frac{X_S}{X_{S0}} - 1 = \left(\frac{U}{U_0} \right)^{1/2} - \frac{\theta}{\theta_0}. \tag{3.142}$$

Два члена в первой части последнего соотношения отвечают двум факторам. Первый член $(U/U_0)^{1/2}$ отражает эффект замедления (при $m_0 < 1$) или ускорения (при $m_0 > 1$) газа струи спутным потоком под воздействием силы трения. Второй член (θ/θ_0) характеризует диссипацию кинетической энергии газа струи, при этом $(\theta/\theta_0) \geqslant 1$. При $m_0 < 1$ направление обоих факторов совпадает (оба они приводят к уменьшению X). При $m_0 > 1$ эти факторы действуют противоположно друг другу: первый приводит к увеличению X, а второй — к уменьшению. При этом величина второго фактора превалирует, что в результате приводит к уменьшению X в обоих случаях.

Отметим, что полученные выражения для θ/θ_0, X/X_0 и Y/Y_0 недостаточно точны для значений параметра спутности m_0, близкого к единице, когда эффект взаимодействия является достаточно слабым. Однако приведенная здесь физическая интерпретация двух факторов $(U/U_0)^{1/2}$ и θ/θ_0 позволяет ожидать, что вывод о характере влияния вязкости на продольные размеры X и Yявляется, по-видимому, справедливым для всего диапазона параметра m_0.

Необходимо также отметить, что хотя вывод приведенных соотношений сделан в предположении о больших гиперзвуковых числах M_a и M_∞, а также больших степеней нерасчетности n, конечные результаты оказываются в достаточной степени применимыми и при умеренных значениях этих параметров. В качестве иллюстрации этого обстоятельства на рис. 3.49 сплошной кривой и пунктиром приведены зависимости (X_S/X_{S0}) по формулам (3.140) и (3.133). Соответствие с данными численных расчетов в обоих случаях очень хорошее.

Анализ полученных соотношений также обнаруживает различную зависимость величин (θ/θ_0); (X/X_0); (Y/Y_0), характеризующих вязкое взаимодействие от параметра спутности m_0 для турбулентного и ламинарного режимов течения. При турбулентном режиме течения эффекты вязкости взаимодействия значительно сильнее зависят от разности (m_0-1), что обусловлено структурным видом коэффициента турбулентной вязкости, принятой здесь в виде второй формулы Прандтля. При ламинарном режиме течения зависимость от параметра m_0 значительно слабее. Так, например, в предельном гиперзвуковом соотношении (3.137) разность (m_0-1) вообще не фигурирует.

Последнее обстоятельство позволило провести обобщение экспериментальных расчетов по исследованию влияния вязкого взаимодействия на геометрическую форму висячего скачка уплотнения для струй воздуха большой степени нерасчетности $(n>10)$, истекающих в сверхзвуковой спутный поток. Эти эксперименты при ламинарном режиме проведены В. Ф. Алымовым, В. В. Волчковым и А. В. Ивановым, а при переходном и турбулентном режимах — В. Ф. Алымовым, И. М. Карпманом и В. Д. Трасковским. Параметры режимов этих опытов даны в табл. 3.2, а сами результаты обобщения приводятся на рис. 3.52 в виде зависимости комплекса $(Y_S/X_S-Y_{S0}/X_{S0})$ от числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_X=\rho_m\overline{W}X/\mu_m$ (см. соотношение (3.125)).

Таблица 3.2

Обозначение	M_∞	M_a	m_0	i_0	Обозначение	M_∞	M_a	m_0	i_0
▼	3,8	1	1,02	1,28	▽	3,8	3	0,96	1,37
●	6	1	1,43	2,35	□	5,65	2,1	1,5	2,46
+	7,37	1	1,47	2,52	○	5,65	3	1,53	2,62
×	7,7	1	1,51	2,48	■	6	3	1,2	1,62
◆	8	1	1,47	2,18	*	6,17	2,1	1,59	2,86
◐	3	3	0,8	1	▲	6,5	2,1	1,5	2,5
△	3,55	3	1,2	2,1	◇	8	2	1,4	2,13

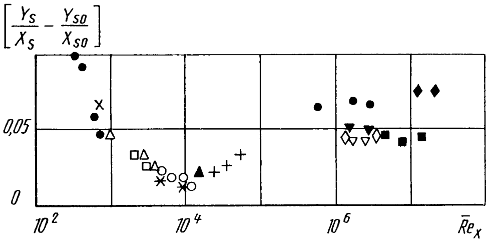


Рис. 3.52 Обобщенная экспериментальная зависимость эффекта вязкого взаимодействия при различных режимах течения в слое смешения

Величина $(Y_S/X_S - Y_{S0}/X_{S0})$, отложенная на этом рисунке по оси ординат, была выбрана на основе отмечавшегося ранее ожидания слабой зависимости отношения θ/θ_0 от параметра m_0 при ламинарном режиме течения. Кроме того, как показали эксперименты, замеренные отношения Y_S/X_S поперечных и продольных размеров висячего скачка в значительно меньшей степени зависели при $n>10$ от степени нерасчетности истечения, которая варьировалась в опытах, а также от наличия у моделей конечного кормового среза и конечного по сравнению с Y диаметра модели, приводящих к некоторым искажениям параметров набегающего на струю спутного потока.

Из выражений (3.139) следует

$$\left(\frac{Y_S}{X_S}\right)\Big/\left(\frac{Y_{S0}}{X_{S0}}\right)=\frac{\theta}{\theta_0}$$

или с учетом (3.137), полученным для $K \gg 1$,

$$\left(\frac{Y_S}{X_S}\right)\Big/\left(\frac{Y_{S0}}{X_{S0}}\right)-1=\frac{\theta}{\theta}-1=\frac{1}{2}\varsigma\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}-1}\frac{H}{e_a}\tau_0 .$$

Далее, так как при $K \gg 1$ $\tau_0 \sim \theta_0$; $(H_a/e_a)\tau_0 \sim \tau_0/\theta_0^2 \sim 1/\tau_0 \sim X_{S0}/Y_{S0}$, то находим

$$\frac{Y_S}{X_S}-\frac{Y_{S0}}{X_{S0}} \sim \varsigma ,$$

где ς соответствует одному из выражений (3.134) или (3.135) для турбулентного или ламинарного режимов.

Из представленных на рис. 3.52 результатов видно, что при значениях $\bar{\mathrm{Re}}_X \leqslant 10^4$ экспериментально определенные величины комплекса $(Y_S/X_S - Y_{S0}/X_{S0})$ для различных значений M_∞, M_a, m_0 с хорошей точностью укладываются на единую кривую. При этом зависимость указанного комплекса от числа $\bar{\mathrm{Re}}_X$ соответствует ожидаемой зависимости для ламинарного режима. Подтверждается и ожидаемое слабое влияние на эту зависимость от параметра спутности m_0.

Наоборот, при $\bar{\mathrm{Re}}_X \geqslant 10^6$, где режим течения был заведомо турбулентный, наблюдается независимость комплекса $(Y_S/X_S - Y_{S0}/X_{S0})$ от $\bar{\mathrm{Re}}_X$ и расслоение по m_0, как и предсказано ранее для этого режима течения.

Однако расслоение по m_0 носит в определенной степени нерегулярный характер. Последнее связано с особенностями проведения экспериментов, обусловленных влиянием на результаты конечного размера и конструкции донной части моделей. Если в опытах для ламинарного режима использовались достаточно малые модели и степени нерасчетности истечения поддерживались достаточно высокими ($n>100$), так что характерный поперечный размер струи Y значительно превышал радиус $r_м$ модели, то в опытах для турбулентного режима это выполнялось недостаточно строго. Последнее было связано как с возможностями установок, так и с трудностями в изготовлении прочных моделей малого размера. Различным в этих двух режимах было и влияние отрыва пограничного слоя на поверхности модели, индуцированного струей.

При проведении опытов в турбулентном режиме влияние размеров моделей и конструкции их кормовых частей было подробно изучено. С этой целью испытывались модели с различными отношениями радиуса r_a среза сопла к радиусу $r_м$ самой модели. На рис. 3.53 и 3.54 приведены результаты измерений максимального радиуса Y_{Sm} висячего скачка и расстояния X_S до точки отражения его от оси при различных значениях степени нерасчетности и отношения $r_a/r_м$. Обнаруживается существенное расслоение зависимостей $Y_{Sm}=Y_{Sm}(n)$ и $X_S=X_S(n)$ по величине отношения $r_a/r_м$. Для отношения величин Y_{Sm}/X_S, построенных по данным тех же опытов, такое расслоение практически исчезает при увеличении степени нерасчетности до значений порядка 10^2. Данный факт иллюстрируется на рис. 3.55, на котором приведена зависимость отношения X_S/Y_{Sm} от $\sqrt{n}$, построенная по данным тех же опытов, что и на рис. 3.53 и 3.54.

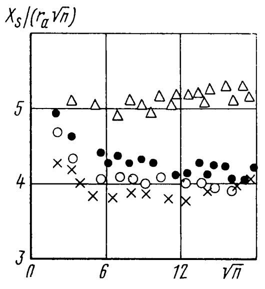


Рис. 3.53. Расстояние до точки отражения висячего скачка от оси при различных значениях степени нерасчетности и различных поперечных размерах моделей ($M_a=3$; $M_\infty=6$; $\gamma_a=\gamma_\infty=1,4$):

△ — $r_a/r_м=0,167$, ● — $r_a/r_м=0,32$; ○ — $r_a/r_м=0,5$, x — $r_a/r_м=0,87$

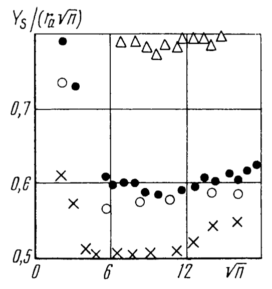


Рис. 3.54. Максимальный радиус висячего скачка уплотнения при различных значениях степени нерасчетности и различных поперечных размерах моделей ($M_a=3$; $M_\infty=6$; $\gamma_a=\gamma_\infty=1,4$):

△ — $r_a/r_м=0,167$, ● — $r_a/r_м=0,32$, ○ — $r_a/r_м=0,5$, × — $r_a/r_м=0,87$

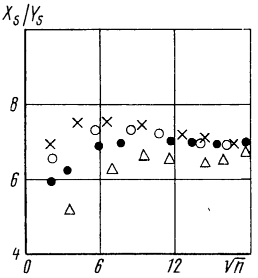


Рис. 3.55. Зависимость параметра формы X_S/Y_S висячего скачка от степени нерасчетности при $M_a=3$; $M_\infty=6$; $\gamma_a=\gamma_\infty=1{,}4$ и для различных поперечных размеров моделей:

△ — $r_a/r_м=0{,}167$, ● — $r_a/r_м=0{,}32$, ○ — $r_a/r_м=0{,}5$, × — $r_a/r_м=0{,}87$

Зависимость характерных размеров струи от размеров модели объясняется возникновением различного рода потерь полного давления, вносимых моделью в набегающий на струю спутный поток. Сюда входят и волновые потери и потери, связанные с наличием пограничного слоя на боковой поверхности модели. Кроме того, с явлением отрыва пограничного слоя возникает своеобразный след с пониженными значениями M_∞, в который истекает струя. При этом, как и обнаруживается на рис. 3.53 и 3.54, характерные размеры струи увеличиваются с увеличением поперечных размеров моделей. В большинстве расчетно-теоретических работ этот фактор не учитывается, что строго оправдано только для случая больших величин n. Влияние этого фактора представляет интерес и для натурных условий полета.

При увеличении n, когда поперечные размеры струи становятся значительно больше, чем поперечный размер следа, образованного моделью, влияние этого фактора ослабляется. По данным приведенных опытов такие условия осуществлялись, когда поперечный размер Y струи превышал радиус модели, по крайней мере, в пять раз. На обобщающей зависимости, представленной на рис. 3.52, в основном использовались данные, удовлетворяющие этому условию. Тем не менее, как свидетельствует обнаружившаяся нерегулярность расслоения по параметру m_0 при $\overline{\mathrm{Re}}_X \geqslant 10^6$, полностью избавиться от фактора влияния модели не удалось.

Диапазон $10^4 \lesssim \overline{\mathrm{Re}}_X \lesssim 10^6$, для которого объем полученных данных является очень ограниченным, может ориентировочно приниматься за область критерия $\overline{\mathrm{Re}}_X$, соответствующую переходу от ламинарного режима течения к турбулентному. Можно практически уверенно утверждать, что значение $\overline{\mathrm{Re}}_X$, отвечающее переходному режиму, должно зависеть от параметра спутности m_0. Меньшим величинам $|1-m_0|$ должно соответствовать большее значение числа Рейнольдса перехода. Это подтверждается в первую очередь сравнением с диапазоном переходных чисел Рейнольдса $10^2 \leqslant \mathrm{Re}_X \leqslant 10^3$, выявленного для случая истечения недорасширенной струи в затопленное пространство.

Подобно тому, как это было сделано для случая истечения при $M_\infty=0$, проведем сопоставление толщины δ_l ламинарного слоя смешения при его переходе к турбулентному режиму с некоторой условной толщиной $\delta_т$ в том же сечении в предположении, что слой смешения на всей длине турбулентный. На обобщенной зависимости рис. 3.52 выделим группу точек со значениями параметра спутности $m_0 \approx 1{,}5$, для которых по аналогии с результатами опытов со струями в затопленном пространстве можно предположить, что при значении числа $\mathrm{Re}_X \approx 10^4$, отвечающему минимуму величины оттеснения, переход от ламинарного режима к турбулентному осуществляется в сечении $x = X_S$. Величины толщин $\delta_l(X_S)$ и $\delta_т(X_S)$, рассчитанных по приведенным ранее соотношениям, получаем соответственно равными 0,11X и 0,17X. А отношение $\delta_т(X_S)/\delta_l(X_S) \approx 1.6$ для данного случая оказывается достаточно близким к аналогично найденной для случая истечения в затопленное пространство. Поэтому при отсутствии в настоящее время надежного критерия перехода в слое смешения спутной струи от ламинарного режима к турбулентному в качестве грубой оценки такого явления возможно использовать соотношение

$$\delta_T(x)/\delta_l(x) = 1{,}5 \ldots 2,$$

которое в дальнейшем подлежит проверке и корректировке.

Представляет интерес перенесение данного результата на условия полета в атмосфере Земли. Выражение (3.125) для числа Re_X при гиперзвуковых условиях полета может быть представлено в следующей форме:

$$\mathrm{Re}_X \approx 1{,}13\left(\frac{h_a}{H_a}\right)^2 \sqrt{\frac{\gamma_a \gamma_\infty}{\gamma_a - 1}} \cdot \mathrm{M}_a \mathrm{M}_\infty \frac{1 + m_0}{\left[(1 - m_0)^2 + 2\tau^2(1 + m_0^2)\right]} \times$$
$$\times \frac{\sqrt{P p_\infty}}{\mu_a W_a}, \tag{3.143}$$

где P — тяга.

Для струи, истекающей из двигателя с тягой $P = 10^5$ Н и числом $\mathrm{M}_a = 4$, при движении с параметрами $\mathrm{M}_\infty = 10$, $m_0 = 1{,}5$ значение числа $\mathrm{Re}_X = 10^4$, соответствующее условиям перехода течения из ламинарного в турбулентное, достигается на высоте $H \approx 120$ км.

Из результатов анализа следует, что при турбулентном режиме течения газодинамическая структура вязкой сильно недорасширенной струи в сверхзвуковом спутном потоке обладает свойством автомодельности по параметру n для всего диапазона чисел Рейнольдса, но при фиксированном значении параметра спутности m_0.

При ламинарном режиме течения зависимость величины эффекта вязкого взаимодействия наоборот слабо зависит от m_0, но существенно зависит от числа Re_X Как показывают представленные экспериментальные результаты в исследованном диапазоне изменения параметра спутности ($m_0 < 2$), геометрическая форма начального участка сильно недорасширенной струи в сверхзвуковом спутном потоке приближенно автомодельна по степени нерасчетности только при фиксированном значении числа Re_X независимо от m_0. При этом можно ожидать и автомодельности в сходственных сечениях $\xi = x/X = \text{const}$ и в распределении избыточных скоростей и полных энтальпий.

Уменьшение числа Re_X до $\text{Re}_X \leqslant 10^2$ приводит к проявлению эффектов разреженности. Кроме значительного утолщения слоя смешения начинает проявляться явление утолщения ударных волн. При достаточно низких значениях Re_X происходит смыкание зоны слоя смешения с зонами размытых висячего скачка уплотнения и головной ударной волны. Становится заметным диффузия газа спутного потока в периферийные области ядра, где течение перестает быть изоэнтропийным. При этом перестают выполняться предположения газовой динамики сплошной среды. Представляет интерес иметь условную границу перехода к разреженному режиму. Такую границу можно наметить на основе оценок толщин ударных волн и сравнения их с характерными размерами струи. При этом для толщины ударной волны d можно использовать экспериментально обоснованную оценку $d \approx 10 l_S$, где l_S — длина свободного пробега молекул, определенная по условиям за скачком уплотнения.

Используя приведенные аналитические зависимости для конфигурации ударных волн, параметры за их фронтом и приближения, соответствующие $n \to \infty$ и гиперзвуковым числам Маха, можно получить для отношения толщины висячего скачка d_1 к характерному размеру струи Y следующую оценку.

$$\frac{d_1}{Y} \approx 16 \sqrt{\gamma_a - 1}\, \frac{X}{r_a} \frac{\xi^2}{\text{Re}_a}$$

или ее другую форму, выраженную через величину тяги,

$$\frac{d_1}{Y} \approx 10^2(\gamma_a - 1) \sqrt{\frac{\gamma_a}{\gamma_\infty}} \cdot \frac{\text{M}_a}{\text{M}_\infty} \frac{\mu_a W_a}{\sqrt{p_\infty P}} \xi^2 . \qquad (3.144)$$

Аналогично для толщины головной ударной волны можно получить

$$\frac{d_3}{Y} = 35 \left[\gamma_\infty \gamma_a (\gamma_a - 1) \right]^{1/2} \frac{\text{M}_\infty \text{M}_a}{\text{Re}_{\infty X}} \left[\frac{\gamma_\infty - 1}{\gamma_\infty + 1} + \right.$$

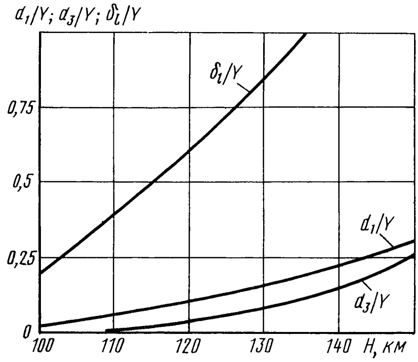
$$\left. + 8(\gamma_a - 1) \frac{\gamma_a \text{M}_a^2}{\gamma_\infty \text{M}_\infty} \xi \right] \qquad (3.145)$$

где

$$\text{Re}_{\infty X} = \frac{\varrho_\infty W_\infty X}{\mu_\infty}$$

На рис. 3.56 представлены зависимости высотного хода отношений (d/Y_1), (d_3/Y) и (δ_l/Y) в сечении струи $x = X$ для одного из типичных наборов определяющих параметров. $P = 10^5$Н; $\text{M}_a = 4$; $\text{M}_\infty = 10$, $m_0 = 1{,}5$, $\gamma_a = 1{,}35$. Можно видеть, что в качестве

Рис. 3.56. Изменение по высоте отношений толщин висячего (d_1) и головного (d_3) скачков уплотнения и слоя смешения (δ) к поперечному размеру струи



крайней границы применимости описания течения с помощью методов теории сплошной среды для данного варианта условий является высота около 150 км.

3.2.4. Переходный и основной участки

Как для случая истечения затопленных струй, под переходным участком неизобарической струи, истекающей в спутный поток, обычно понимают область, расположенную между бочкообразной структурой начального участка и сечением струи, в котором течение становится практически неизобарическим. Область переходного участка характеризуется сравнительно невысокой степенью неизобаричности, т. е. перепады давлений здесь невелики. В то же время свойства течения на этом участке в значительной степени определяются эффектами вязкого перемешивания, которые приводят к размытию ударно-волновой структуры сравнительно слабой интенсивности. Наиболее отчетливо это проявляется, когда начальная степень нерасчетности истечения достаточно высока ($n>10$). В этом случае, с одной стороны, происходит значительная диссипация кинетической энергии потока струи в скачках уплотнения начального участка струи. С другой стороны, при больших степенях нерасчетности в процесс вязкого перемешивания включаются большие массы газа струи и спутного потока. Наиболее типичным режимом течения в переходном участке является турбулентный режим. При определенных условиях слой смешения в переходном участке достаточно быстро смыкается на оси, течение становится вязким по всему сечению, что приводит к интенсивному выравниванию поперечных градиентов давления и переходу к изобарическому течению.

Поскольку, как показано ранее (см. рис. 3.48), положение линии $y_{0,5}(x)$ в слое смешения, на которой $H=0,5(H_a+H_\infty)$, на некотором участке ниже по течению от сечения $x=X$ меняется слабо и примерно соответствует величине характерного поперечного размера Y, то расстояние до точки X_*, где внутренняя граница слоя смешения приходит на ось, может быть грубо оценено из условия $0{,}5\delta(X_*)\approx Y$. Приняв также на этом участке линейный темп нарастания слоя смешения $\delta(X_*)/\delta(X)\approx X_*/X$, что с достаточным основанием применимо к случаю турбулентного режима, получаем

$$\frac{X_*}{X}\approx\frac{\delta(X_*)}{\delta(X)}\approx\frac{2Y}{\delta(X)}=2\tau\frac{X}{\delta(X)}.$$

Рассмотрим случай турбулентного режима течения в слое смешения при $m_0<1$. Используя выражение (3.127), получаем при $\varkappa=0{,}02$

$$\frac{X_*}{X}\approx 8\tau\frac{4X+\sqrt{\gamma_\infty}\cdot KL}{4X+3\sqrt{\gamma_\infty}\cdot KL}\frac{1+m_0}{1-m_0}$$

Поскольку коэффициент при комплексе $(1+m_0)/(1-m_0)$ имеет величину порядка единицы, то можно видеть, что в диапазоне $0<m_0<0{,}7$ расстояние X_* составляет величины примерно от двух до пяти характерных длин.

Следует отметить, что имеющие место в переходном участке небольшие степени нерасчетности, малые величины поперечных составляющих скорости делают этот участок в значительной степени доступным для исследований расчетными методами с использованием различных упрощающих схем уравнений Навье—Стокса и, в частности, параболического приближения. Проведенные расчеты в достаточной мере могут дать качественные представления о структуре течения в переходном участке.

Рассмотрим некоторые из этих результатов. На рис. 3.57 ... 3.59 представлены рассчитанные в работе [73] картины течения и распределения параметров в турбулентной недорасширенной струе, истекающей из сопла в спутный поток, соответствующий полету со скоростью 500 м/с на высоте 15 км. По представленным распределениям давления, температуры и концентрации инертной примеси можно видеть, что переходный участок струи здесь составляет величину порядка двух длин начального участка. Величина давления на этом участке не отличается от давления p_∞ более чем в 2 раза. Изменение температуры вдоль оси относительно своего среднего уровня не превосходят 20%.

На большем удалении течение становится практически изобарическим и вязким по всему сечению струи, происходит выравнивание температуры и концентрации (см. рис. 3.59), т. е. осуществляется переход к основному участку.

Аналогичный характер истечения можно проследить и по данным расчетов [9], приведенных на рис. 3.60. Здесь для случая истечения турбулентной струи из сопла с числом $M_a=3$ на срезе в спутный сверхзвуковой поток с числом $M_\infty=6$ представлены конфигурации условной границы струи $y_{0.5}$ для различных степеней нерасчетности истечения $n=4$, 10, 100, 500. В качестве

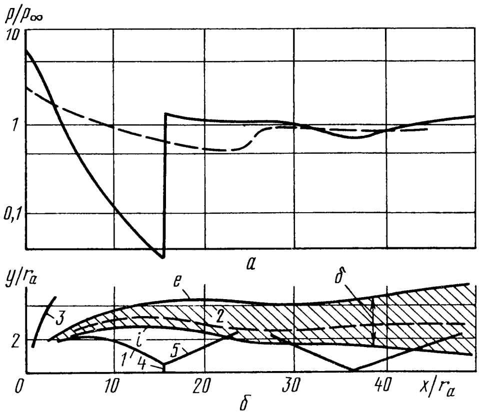


Рис. 3.57. Продольные профили давления (*а*) и структура турбулентной струи (*б*) по данным расчетов [73] для $p_a=0{,}93\cdot10^5$ Па, $T_a=1850$ К, $W_a=2800$ м/с; $p_\infty=1{,}22\cdot10^4$ Па, $T_\infty=200$ К, $M_\infty=1{,}8$; $n=6{,}8$:

1 — висячий скачок, 2 — средняя линия в слое смешения; 3 — головная ударная волна, 4 — диск Маха, 5 — отраженный скачок; *i*, *e*, δ — внутренняя и внешняя границы и толщина слоя смешения соответственно; ———, --- p/p_∞ — давление на оси и линии 2 соответственно

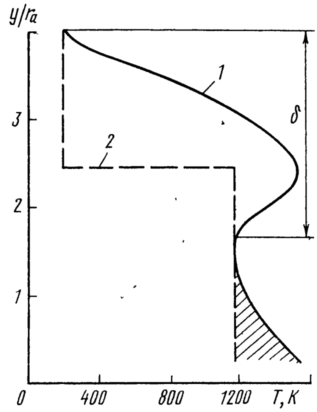


Рис. 3.58. Профили температуры в сечении струи $x/r_a=30$ по данным расчетов [73] для $p_a=0{,}93\cdot10^5$ Па, $T_a=1850$ К, $W_a=2800$ м/с, $p_\infty=1{,}22\cdot10^4$ Па, $T_\infty=200$ К, $M_\infty=1{,}8$, $n=6{,}8$:

1 — вязкое течение; 2 — невязкое течение, штриховка — повышение температуры, обусловленное взаимодействием со скачком уплотнения

условной границы $y_{0,5}$ здесь принято значение поперечной координаты в струе, на которой полная энтальпия равняется полусумме начальных энтальпий смешивающихся потоков $H_{0,5}=(H_a+H_\infty)/2$. При $n=4$ за начальным участком достаточно отчетливо выделяется второе расширение струи (вторая бочка). При $n\geqslant10$ подробного второго расширения уже не образуется. Расчеты

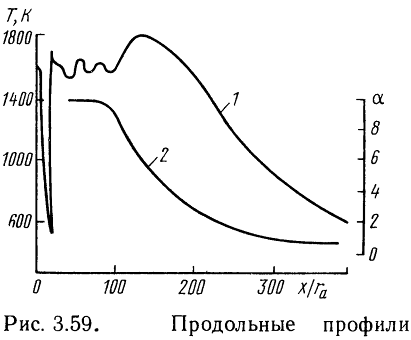


Рис. 3.59. Продольные профили температуры и концентрации истекающего газа в струе по данным расчетов [73] для $p_a=0{,}93\cdot10^5$ Па, $T_a=1850$ К, $W_a=2800$ м/с; $p_\infty=1{,}22\cdot10^4$ Па, $T_\infty=200$ К, $M_\infty=1{,}8$; $n=6{,}8$:

1 — температура, 2 — концентрация

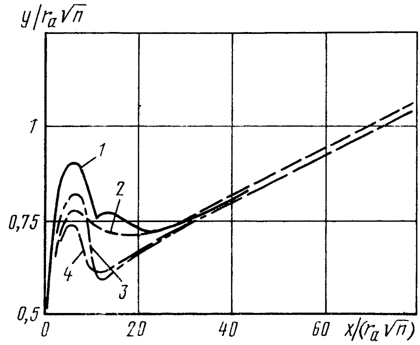


Рис. 3.60. Конфигурация условной границы турбулентной воздушной струи при $M_a=3$; $M_\infty=6$ и различных значений степени нерасчетности [9]:

1 — $n=4$, 2 — $n=10$, 3 — $n=100$, 4 — $n=500$

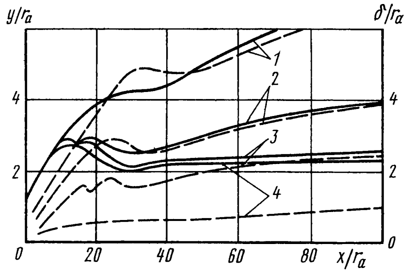


Рис. 3.61. Конфигурация условных границ ламинарной струи по данным расчетов [9] при $n=5$; $M_a=2{,}4$; $M_\infty=3$:
1 — $Re_a=0{,}353\cdot10^2$; *2* — $Re_a=0{,}105\cdot10^3$, *3* — $Re_a=0{,}353\cdot10^3$, *4* — $Re_a=0{,}353\cdot10^4$, ——— условная граница $y_{0,5}$, - - - толщина вязкой области

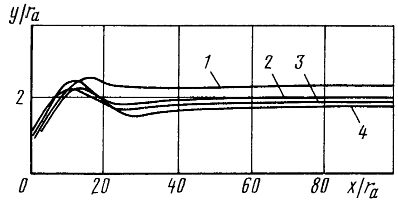


Рис. 3.62. Линии постоянного расхода $G=G_a$ в ламинарной струе по данным расчетов [9] при $n=5$; $M_a=2{,}4$; $M_\infty=3$:
1 — $Re_a=0{,}353\cdot10^2$; *2* — $Re_a=0{,}105\cdot10^3$, *3* — $Re_a=0{,}353\cdot10^3$; *4* — $Re_a=0{,}353\cdot10^4$

также показали, что при $n\geqslant50$ слои смешения смыкаются на оси почти сразу за начальным участком, что и способствует быстрому размыванию бочкообразных структур переходного участка. Область приближения изобарического сечения согласно этим расчетам располагается примерно на расстоянии двух длин бочек от среза сопла.

Качественно подобные результаты получаются и для ламинарного режима течения. На рис. 3.61, 3.62 представлены конфигурации условных границ и поперечного размера вязкой области течения, полученных в расчетах [9] ламинарных воздушных струй для нескольких значений чисел $Re_a=\rho_a W_a r_a/\mu_a$, рассчитанных по параметрам на срезе сопла. Под условными границами на рис. 3.61 принята координата $y_{0,5}(x)$ и на рис. 3.62 — линия постоянного расхода, равного расходу через сопло. Под толщиной

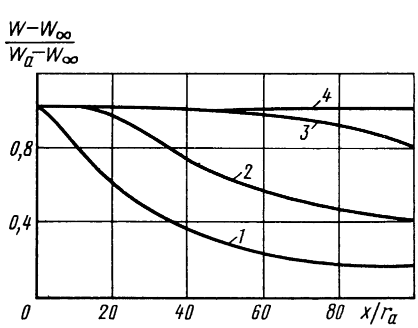


Рис. 3.63. Продольные профили скорости в ламинарной струе по данным расчетов [9] при $n=5$; $M_a=2{,}4$; $M_\infty=3$:
1 — $Re_a=0{,}353\cdot10^2$, *2* — $Re_a=0{,}105\cdot10^3$; *3* — $Re_a=0{,}353\cdot10^3$, *4* — $Re_a=0{,}353\cdot10^4$

вязкой зоны принята область, заключенная между точками, на которых полная энтальпия отличается от своих значений H_a или H_∞ на 20%. На рис. 3.63 для тех же вариантов представлены осевые распределения избыточной безразмерной скорости $(W-W_\infty)/(W_a-W_\infty)$.

На рис. 3.64 . . . 3.66 представлены экспериментальные данные по структуре ламинарной струи CO_2, истекающей из сопла с

Рис. 3.64. Ламинарная недорасширенная струя CO_2, истекающая в спутный сверхзвуковой поток воздуха ($M_a=2{,}8$; $M_\infty=5{,}9$; $n=210$; $Re_a=2{,}4\cdot10^3$; $Re_\infty/1$ м$=8{,}5\cdot10^4$; $T_{0\infty}/T_{0a}=1{,}4$; $W_\infty/W_a=1{,}4$)

числом $M_a=2{,}8$ в сверхзвуковой поток воздуха. Данные получены методом электронного пучка.

На рис. 3.64 представлена фотография визуализации течения в меридиональной плоскости. По этой фотографии, охватывающей по протяженности участок, примерно равный трем бочкам, можно качественно судить о том, что в данном случае многобочечная структура струи оказывается размытой вязкими процессами, так как за начальным участком не наблюдается периодически повто-

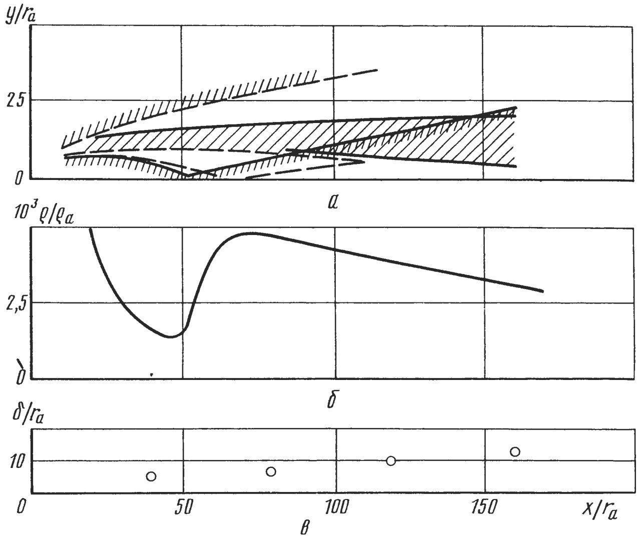


Рис. 3.65. Структура ламинарной недорасширенной струи CO_2, истекающей в спутный сверхзвуковой поток воздуха ($M_a=2{,}8$; $M_\infty=5{,}9$; $n=210$; $Re_a=2{,}4\cdot10^3$; $Re_\infty/1$ м$=8{,}5\cdot10^4$; $T_{0\infty}/T_{0a}=1$; $W_\infty/W_a=1{,}4$):

а — конфигурация ударных волн и слоя смешения, *б* — осевое распределение суммарной плотности, *в* — толщина слоя смешения ряющихся зон с повышенной плотностью. Это заключение подтверждается (см. рис. 3.65, 3.66) количественными данными по измерениям суммарной плотности ρ и парциальной плотности ρ_i истекающего газа CO_2.

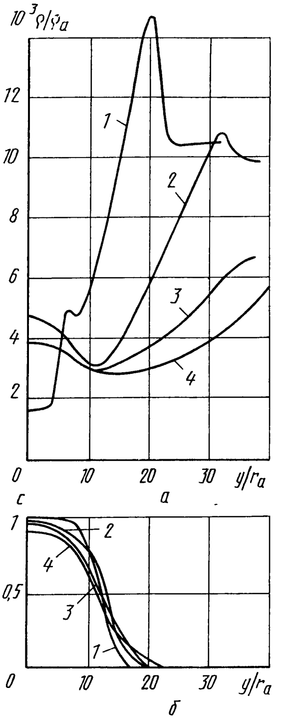


Рис. 3.66. Поперечные распределения плотности в ламинарной недорасширенной струе CO_2, истекающей в спутный сверхзвуковой поток воздуха ($M_a=2{,}8$; $M_\infty=5{,}9$; $n=210$; $Re_a=2{,}4\cdot10^3$; $Re_\infty/1$ м$=8{,}5\cdot10^4$; $T_{0\infty}/T_{0a}=1$; $W_\infty/W_a=1{,}4$):

а — суммарная плотность ρ; *б* — парциальная плотность ρ_i истекающего газа, кривые *1—4* соответствуют сечениям $x/r_a=40$, 80, 120, 167

На рис. 3.65, *а* представлены восстановленные по результатам измерений ϱ и ϱ_i и фотографии визуализации конфигурации ударных волн и характерных зон начального участка, продольное распределение плотности и толщина слоя в начальном и переходном участках. Поперечные распределения суммарной и парциальной плотностей в этих участках представлены на рис. 3.66. Толщина слоя смешения, представленная на рис. 3.65, *в*, определена по 10%-ному отклонению концентрации CO_2 от своих предельных значений (см. рис. 3.65).

Можно видеть, что в пределах погрешностей измерения по продольному профилю плотности за начальным участком не обнаруживаются зоны уплотнения, характерные для многобочечной структуры. Из рассмотрения поперечных профилей парциальной плотности ρ_i и толщины слоя смешения следует, что слой смешения смыкается на оси на расстоянии от среза сопла, примерно равном двум длинам начального участка.

С учетом этих данных можно приближенно полагать, что для сильно недорасширенных ($n>10$) струй длина переходного участка составляет величину порядка длины начального участка. За переходным участком можно считать течение изобарическим. Здесь поперечные составляющие скорости во всем поле течения становятся пренебрежимо малыми, а продольная составляющая скорости вне струи стремится к скорости невозмущенного потока $u_e\to W_\infty=\text{const}$. При этом для струи начинает выполняться уравнение сохранения избыточного импульса в виде

$$\frac{d}{dx}\int_0^{y_e}\varrho u(u-u_e)y\,dy=0$$

или

$$\int_0^{y_e} \varrho u(u-u_e) y dy = \mathcal{J}_0,$$

которое получается при интегрировании уравнения количества движения в проекции на ось x по поперечной координате до границы вязкой зоны $y=y_e$, на которой становятся исчезающе малыми вязкие напряжения и поперечные составляющие скорости. Кроме того, как и выше по течению, сохраняются избыточные величины полного теплосодержания

$$\frac{d}{dx} = \int_0^{y_e} \varrho u(H-H_e) y dy = 0$$

и концентрации инертной примеси

$$\frac{d}{dx} \int_0^{ye} \mu u c y dy = 0.$$

В подавляющем большинстве случаев течение в основном участке струи является турбулентным. При этом усредненные характеристики течения в этой области в значительной мере определяются величиной избыточного импульса $\mathcal{J}_0$, который может быть определен по профилям параметров в изобарическом сечении, если последние известны.

Поперечные распределения концентрации инертной примеси и относительные избыточные средние скорость и полная энтальпия автомодельны по безразмерной поперечной координате $\eta = u/y_e$, т. е.

$$\frac{u-u_e}{u_m-u_e} = f_u(\eta), \quad \frac{H-H_e}{H_m-H_e} = f_H(\eta), \quad c = f_c(\eta)$$

где u_m и H_m значения параметров на оси. Закон сохранения избыточного импульса обусловливает также степенной вид убывания вдоль оси следующих относительных избыточных величин

$$\frac{u_m-u_e}{u_{m0}-u_e} \sim x^{-k_u}; \quad \frac{H_m-H_e}{H_{m0}-H_e} \sim x^{-k_H}; \quad c \sim x^{-k_c},$$

где u_{m0} и H_{m0} — соответствующие значения в изобарическом сечении, а k_u, k_H и k_c — постоянные порядка единицы, определенные структурой течения. Например, для случая истечения струи в затопленное пространство $k_u = k_H = k_c = 1$. Для струйных потоков типа следа за плоскообтекаемым телом $k_u = 2/3$.

Течение в основном участке струи на больших расстояниях от соплового устройства перестает зависеть от особенностей в начальном участке и в значительной мере поэтому сходно со случаем, соответствующим изобарическому истечению из сопла, детально рассматриваемого в работах [14, 58].

Для упрощения предсказания параметров в основном участке неизобарической струи в ряде случаев можно вообще отбросить из рассмотрения начальный участок. Например, для оценок инфракрасного излучения от струй двигательных установок при полете на высотах до 30 км можно рассматривать только переходный и основной участки, так как вклад начального участка является малым. С этой целью заменяют реальную неизобарическую струю струей от некоторого эквивалентного сопла, имеющего на выходе давление, равное давлению в невозмущенном спутном потоке или окружающем затопленном пространстве. Радиус выходного сечения эквивалентного сопла, а также значения усредненных по этому сечению температуры и скорости газа подбирают в соответствии с геометрией течения в начальном участке струи и интегральными законами сохранения. Так в работе [17] в качестве радиуса выходного сечения принят наибольший радиус неизобарической струи невязкого газа, оценка которого уточнена в работе [43]. Выше на основании многочисленных экспериментальных и теоретических исследований приведены данные для максимального диаметра начального участка неизобарической струи, которые и могут быть использованы в качестве диаметра эквивалентного сопла. Например, можно использовать выражение (3.36)

$$\frac{Y}{r_a^2}=1+\frac{G_a U}{2\pi\varrho W_\infty^2}\ln(1+2\gamma_\infty K^2),$$

где G_a — расход через сопло: $K=M_\infty\theta$ — параметр гиперзвукового подобия; $\theta=[(\gamma_a-1)(\gamma_a M_a^2+2)]^{-1/2}$ — характерный угол течения в начальном участке струи; U — средняя скорость в начальном участке струи

$$U=W_a\left(1+\frac{2}{\gamma_a M_a^2}\right)^{1/2},$$

определяемая полной энтальпией истекающего газа за вычетом его тепловой энергии $c_v T_a$, идущей на движение в поперечном направлении. Величина U может быть принята в качестве скорости на срезе эквивалентного сопла. По величинам G_a, Y и U может быть определена средняя плотность на срезе эквивалентного сопла, а с помощью уравнения состояния — средняя температура.

3.3. РЕЛАКСАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ В СВЕРХЗВУКОВЫХ НЕДОРАСШИРЕННЫХ СТРУЯХ

3.3.1. Влияние релаксационных процессов на структуру недорасширенной струи

В предыдущих разделах рассматривалось течение в сверхзвуковых неизобарических струях в рамках модели совершенного газа. Однако эта модель является лишь определенным приближением к действительности, поскольку быстрое расширение реального газа в струях сопровождается различными релаксационными процессами: химической, колебательной, вращательной и поступательной релаксацией, неравновесной конденсацией.

Известно, что для установления равновесия между колебательными и поступательными степенями свободы необходимы десятки и сотни тысяч столкновений молекул, между вращательными и поступательными степенями свободы единицы или десятки столкновений и, наконец, для установления максвелловского распределения скоростей — одно или два столкновения. При быстром расширении газа, которое имеет место в изоэнтропийном ядре сильно недорасширенной струи, резко уменьшается число столкновений молекул в единицу времени вследствие уменьшения плотности газа. Это является причиной возникновения неравновесного состояния газа.

Кроме того, при уменьшении температуры газа в процессе расширения достигается точка росы и может возникнуть конденсация, которая опять-таки из-за низкой плотности газа будет носить неравновесный характер.

Отметим также, что влияние релаксационных процессов на структуру струи и распределения газодинамических параметров связано не только с неравновесностью течения в самой струе, но и с изменением параметров на выходе сопла из-за возможного отклонения течения от неравновесного внутри сопла.

В монографии [54] рассмотрено протекание релаксационных процессов в газе при истечении струи в вакуум и их влияние на газодинамические параметры струи. Эти данные, естественно, относятся и к течению в изоэнтропийном ядре сильно недорасширенных струй. В то же время исследований влияния релаксационных процессов на волновую структуру сильно недорасширенных струй явно недостаточно, чтобы построить законченную картину. Имеющиеся в основном экспериментальные результаты позволяют дать лишь качественное представление о влиянии релаксационных процессов на положение ударных волн в недорасширенной струе.

С. Кристом, П. Шерманом и Д. Глассом (1966) проведено экспериментальное исследование структуры сильно недорасширенной затопленной струи, вытекающей из звукового сопла при отношениях давления $p_0/p_\infty=10\ldots10^5$. В качестве рабочих газов использовались азот, аргон, гелий, смеси аргона с гелием, углекислый газ и фреон 22. Эксперименты проводились при температуре $T_0=298$ K, а в случае азота и гелия и с подогревом до $T_0=4200$ K и $T_0=1400$ K соответственно. По шлиренфотографиям струи были измерены расстояние до центрального скачка X_S и его диаметр D_S.

Оказалось, что расстояние до центрального скачка при $p_0/p_\infty=\mathrm{const}$ практически не зависит от γ (сравнение данных для подогретого азота и гелия) и конденсации (сравнение данных для гелия и аргона). Зависимость X_S от p_0/p_∞ имеет вид

$$X_S/D_a \approx 0{,}645(p_0/p_\infty)^{0,5}. \qquad (3.146)$$

Если в соотношении (3.146) перейти от p_0/p_∞ к степени нерасчетности n согласно $n=[2/(\gamma+1)]^{\gamma/(\gamma+1)}p_0/p_\infty$, то при $n=\mathrm{const}$ расстояние до центрального скачка будет возрастать при увеличении γ, но более слабо, чем пропорционально $\gamma^{0,5}$ согласно расчетам и экспериментальным данным.

Эксперименты показали, что диаметр центрального скачка возрастает при уменьшении γ, а в струе гелия он всегда меньше, чем в струе аргона. Это можно объяснить конденсацией аргона. Конденсация в сверхзвуковом потоке вызывает увеличение давления. Поэтому граница струи, на которой давление равно окружающему, должна переместиться в направлении от оси струи. При неизменном положении центрального скачка это означает увеличение его диаметра. Обнаружено также, что увеличение температуры торможения приводит к увеличению угла расширения струи азота и диаметра центрального скачка. По-видимому, это является результатом влияния двух противоположных факторов. Подогрев азота, с одной стороны, уменьшает эффективный показатель изоэнтропы расширения из-за возбуждения колебательных степеней свободы молекул, а с другой стороны, устраняет конденсацию. Первый эффект вызывает увеличение D_S, второй — уменьшение.

Эксперименты показали, что при низких температурах торможения на структуру струи начинают оказывать влияние силы межмолекулярного взаимодействия (газ становится термически несовершенным). Обусловленное ими увеличение эффективного показателя изоэнтропы приводит к уменьшению диаметра центрального скачка. В азоте этот эффект становится заметным при плотностях, в 200 раз превышающих плотность при нормальных условиях.

3.3.2. Химическая и колебательная релаксация в недорасширенных струях ЛА (модель идеального газа)

Выхлопные струи ЛА могут оказывать различное воздействие на окружающую атмосферу. Сюда прежде всего можно отнести непосредственное загрязнение окружающей среды продуктами сгорания топлив, среди которых могут находиться и токсичные вещества типа угарного газа CO, окислов азота NO_x и др. Представляет интерес проблема возмущения ионосферы в результате взаимодействия продуктов сгорания выхлопной струи с плазмой, воздействие выхлопной струи на озоновый слой Земли. Существует мнение, что за счет высокой температуры струи и присутствующих в ней некоторых химических компонентов (таких как NO_x, H_2, Cl, Br и др.) может нарушиться стабильность озонного слоя вплоть до его разрушения в окрестности траектории ЛА.

Для определения различных эффектов, обусловленных высотными струями ЛА, необходимо прежде всего исследовать химический состав струи реактивного двигателя. Отметим, что такая проблема, как оценка неравновесного излучения струй реактивного двигателя, требует определения не только химического состава, но и колебательных энергий (или колебательных температур) различных молекул продуктов сгорания в струе.

Экспериментальное исследование неравновесных физико-химических процессов в неизобарических струях реактивных двигателей является дорогостоящей задачей из-за сложности моделирования всего комплекса полетных условий. Поэтому основные усилия исследователей были направлены на разработку методов расчета течений в струях с неравновесными физико-химическими процессами и численное исследование таких течений.

В этом разделе анализируется протекание неравновесных физико-химических процессов в неизобарических струях и их влияние на газодинамические параметры струй в рамках приближения идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа.

Проведем анализ химической релаксации в неизобарических струях применительно к смеси продуктов сгорания топлив, содержащих атомы C, H, O, N. Система уравнений химической кинетики и константы скорости реакций использовались те же, что и в работе [44]. Расчеты неравновесного химического состава были проведены в одномерном приближении вдоль линии тока недорасширенной струи, истекающей в спутный сверхзвуковой поток или в затопленное пространство.

Распределение давления вдоль линии тока определялось из расчета струи совершенного газа с показателем адиабаты, равным эффективному значению показателя адиабаты расширения смеси продуктов сгорания с замороженным по срезу сопла химическим составом и равновесно возбужденным колебательными степенями свободы молекул.

Расчеты показали, что при варьировании температуры T_a на срезе сопла от 1000 до 2000 K концентрации основных молекулярных компонентов смеси (H_2O, CO_2, CO, N_2, H_2, NO) в пределах начального участка струи сохраняются практически такими же, как на срезе сопла. В качестве примера на рис. 3.67 для топлива $(CH_3)_2NNH_2+N_2O_4$ показано изменение молярных концентраций компонентов в зависимости от местного давления на линии тока. Условия расчета: давление в камере сгорания $p_0=10$ МПа, коэффициент избытка окислителя $\alpha=0{,}85$, диаметр критического сопла $D_*=110$ мм, отношение площадей сопла $F_a/F_*=72{,}5$ (давление на срезе сопла $p_a\approx10^4$ Па). Результаты приведены для оси струи в предельном случае истечения струи в вакуум. В случае истечения струи в среду с конечным давле-

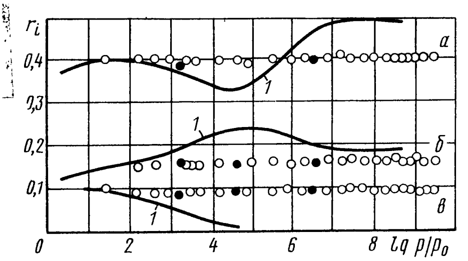


Рис. 3.67. Сравнение молярных концентраций молекулярных компонентов смеси в неравновесном и равновесном течениях:

а — H_2O; *б* — CO_2, *в* — CO, *1* — равновесные значения, ○ — неравновесные значения, ось сопла и струи до скачков уплотнения, ● — неравновесные значения, ось струи за скачком уплотнения

нием они соответствуют области изоэнтропийного расширения до образующихся в струе скачков уплотнения.

На рис. 3.67 для сравнения показаны также равновесные значения концентраций компонентов. Из рассмотрения рис. 3.67 следует, что концентрации компонентов смеси в струе практически не изменяются, причем они существенно отличаются от равновесных значений. Этот результат не является неожиданным. Известно [44], что при расширении продуктов сгорания в соплах реакции рекомбинации замораживаются в окрестности критического сечения. В результате концентрации основных молекулярных компонентов смеси (H_2O, CO_2, CO, N_2, H_2, NO), общая весовая доля которых в продуктах сгорания составляет более 95%, при дальнейшем расширении изменяются незначительно. Поскольку за срезом сопла в области изоэнтропийного расширения давление и температура газа резко уменьшаются, то естественно, что реакции рекомбинации не размораживаются и химический состав смеси остается таким же, как на выходе сопла. Очевидно, что вывод о замороженности химического состава в области изоэнтропийного расширения струи относится не только к осевой линии тока, но и к другим линиям тока, поскольку при удалении от оси струи градиенты изменения температуры и давления вдоль линии тока возрастают.

Рассмотрим теперь протекание химических реакций в области течения за скачками уплотнения: висячим и отраженным, за которыми течение остается сверхзвуковым, и образующимся в окрестности оси центральным скачком (диском Маха), близким по интенсивности к прямому скачку.

В случае истечения струи в спутный сверхзвуковой поток с числом Маха $M_\infty \geqslant 3$ область течения, охватываемая диском Маха, мала и ею практически можно пренебречь, считая отражение висячего скачка от оси регулярным. В этом случае температура газа в области за косым скачком уплотнения не превышает температуры на срезе сопла и уменьшается с ростом степени нерасчетности струи (высоты полета ЛА). Давление за скачками уплотнения близко к давлению в невозмущенном спутном потоке и поэтому обычно значительно меньше, чем давление на срезе сопла. Следует ожидать, что химические реакции за висячим и отраженным скачками уплотнения не должны возбуждаться.

Это подтверждается результатами расчета неравновесного протекания химических реакций вдоль линии тока: на рис. 3.67 показаны значения концентраций компонентов на оси струи за висячим и отраженным скачками.

Поскольку замороженные концентрации компонентов могут значительно отличаться от равновесных значений, то в условиях постоянных термодинамических параметров они должны постепенно изменяться, приближаясь к равновесным значениям. На границе струи, истекающей в затопленное пространство, давление постоянно. Расчет, проведенный при условиях, при которых имеет место существенное отличие концентраций от равновесных ($p/p_0=10^{-4}$ — это значение соответствует условиям на границе недорасширенной затопленной струи со степенью нерасчетности $n=10$), показал, что на длине 1 км концентрации компонентов остаются практически неизменными.

Вдоль границы недорасширенной струи, истекающей в спутный сверхзвуковой поток, давление уменьшается. Поэтому в этом случае тем более концентрации компонентов будут сохраняться замороженными и равными значениям на срезе сопла.

Результаты анализа в одномерном приближении хорошо согласуются с имеющимися единичными расчетами неизобарических сверхзвуковых струй с неравновесными химическими реакциями. В работе [28] послойным методом характеристик (без выделения ударных волн) проведен расчет течения в недорасширенной затопленной струе при $n=5$. Рассматривалось истечение продуктов сгорания топлива $(CH_3)_2NNH_2+N_2O_4$. Из результатов расчетов следует, что в висячем скачке уплотнения, несмотря на существенное повышение давления (в 15 раз), концентрации компонентов изменяются незначительно. Так изменение молярных концентраций CO_2, H_2O и N_2 при переходе через висячий скачок составляет соответственно 5, 2 и 0,03%. Суммарный молекулярный вес смеси изменяется не более чем на 1%.

Проведено сравнение геометрических и газодинамических параметров струй при химически неравновесном и замороженном течениях, а также при $\gamma=1{,}189$. Это значение γ соответствует условиям на срезе сопла в предположении замороженного химического состава и равновесно возбужденных колебаний молекул. Из расчетов следует, что геометрические характеристики струи слабо зависят от характера течения. Так, ординаты границы струи, полученные для неравновесного и замороженного течений, в сечениях с одинаковыми x отличаются не более чем на 2%, а для неравновесного течения и течения с $\gamma=\text{const}$ отличие составляет 4%. Различие в газодинамических параметрах более существенно. Наибольшие отличия проявляются в полях температуры и давления.

Интересно, что в отличие от изоэнтропийного течения (при $\gamma=\text{const}$) в неравновесном случае вдоль границы затопленной струи имеют место небольшие изменения газодинамических параметров (плотности, числа Маха), обусловленные изменением температуры, которое от выходного сечения сопла до сечения струи с максимальным диаметром границы составляет 5%. При этом плотность уменьшается на 4%, число Маха — на 1,7%.

Рассмотрим теперь течение газа вблизи оси недорасширенной затопленной струи за диском Маха, за которым образуется дозвуковая область течения с высокими значениями температуры газа. В результате возбуждаются реакции диссоциации, вызывающие изменение химического состава смеси. На рис. 3.68 показано изменение концентраций компонентов и температуры за диском Маха при степени нерасчетности $n=50$. Расчет проведен в предположении, что статическое давление за диском Маха постоянно и равно давлению в окружающей среде. Непосредственно за центральным скачком температура газа близка к температуре в камере сгорания. Далее в результате возбуждения реакций диссоциации изменяются концентрации компонентов и уменьшается температура газа. Однако на длине более 15 м при диаметре выходного сечения сопла примерно 1 м температура еще не достигает равновесного значения, что свидетельствует о большой протяженности зоны химической релаксации в этих условиях.

Отметим, что интенсивный повторный нагрев продуктов сгорания за диском Маха является причиной видимого свечения факела ракеты.

Проведенный анализ химической релаксации в сверхзвуковых недорасширенных струях позволяет сделать вывод, что на начальном участке струи вне области течения за диском Маха (которой можно пренебречь в случае истечения в спутный сверхзвуковой поток) химический состав продуктов сгорания сохраняется таким же, как на срезе сопла. В этом случае газодинамика струи, по крайней мере, в области вне слоя смешения струи с внешним потоком, где возможно догорание продуктов истечения, может рассчитываться в приближении замороженного химического состава смеси.

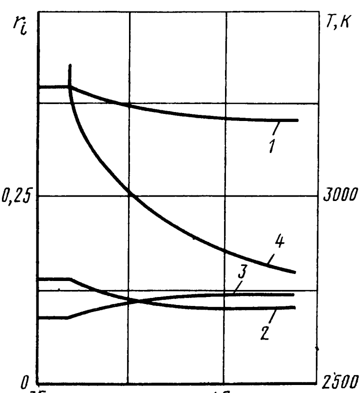


Рис. 3.68. Изменение температуры и концентрации компонентов за центральным скачком:
1 — H_2O; 2 — CO_2; 3 — CO; 4 — T

Для области смешения указанные замороженные концентрации определяют граничные условия на внутренней границе слоя смешения.

Подчеркнем, что этот вывод относится к струям, истекающим из сверхзвуковых сопл с такими степенями расширения (примерно $F_a/F_* > 4$), что внутри сопла происходит замораживание концентраций основных молекулярных компонентов смеси. Если такое замораживание в сопле не происходит, то в некоторой окрестности среза сопла возможно протекание химических реакций и соответствующее изменение химического состава смеси. В этом случае корректный расчет газодинамики струи требует учета неравновесного протекания химических реакций в двумерной постановке [47].

В общем случае течение высокотемпературных газов сопровождается одновременно протекающими процессами химической и колебательной релаксации. Однако на основании приведенных результатов колебательную релаксацию многокомпонентной смеси продуктов сгорания в сверхзвуковых недорасширенных струях можно исследовать при замороженном химическом составе смеси.

При истечении струи из сверхзвукового сопла необходимо учитывать предысторию развития неравновесного течения. Влияние колебательной релаксации на течение в струе связано не только собственно с характером неравновесности в струе, но и с изменением параметров на срезе сопла из-за возможного отклонения течения от равновесного.

Результаты исследований [5] течений многокомпонентной смеси продуктов сгорания в соплах при наличии колебательной релаксации показывают, что нарушение равновесия между колебательными и поступательными степенями свободы молекул слабо влияет на скорость истечения и плотность газа, но может заметно уменьшить давление и температуру на выходе сопла. Для течений с фиксированной температурой торможения T_0 протекание колебательной релаксации в сопле определяется параметром подобия p_0D_*, где p_0 — давление в камере сгорания, D_* — диаметр критического сечения сопла. Результаты [5] показывают, что при значениях $p_0D_* \leqslant 10$ МПа мм отличие давления и температуры газа от их равновесных значений может составлять 10...20%. Уменьшение температуры вызывает увеличение числа Маха на выходе сопла и соответствующее изменение характеристик струи.

Основными молекулярными компонентами продуктов сгорания химических топлив являются H_2O, CO_2, CO, N_2, H_2, NO.

При уменьшении p_0D_* колебательные температуры молекул отклоняются от своих равновесных значений и при достаточно малых значениях p_0D_* и больших степенях расширения сопла могут замораживаться. Анализ результатов показывает, что при уменьшении p_0D_* неравновесный характер расширения сказывается прежде всего на колебательных температурах таких компонентов, как CO, N_2, H_2, NO. Например, если при $p_0D_* = 62{,}5$ МПа·мм колебательная температура деформационного типа колебаний молекул H_2O практически совпадает с температурой газа (температурой поступательных и вращательных степеней свободы) в диапазоне значений геометрической степени расширения сопла $F_a/F_* \leqslant 100$, то колебательная температура молекул CO отклоняется от температуры газа уже при $F_a/F_* \approx 4$, а при $F_a/F_* = 100$ превышает ее более чем в полтора раза.

Краткое рассмотрение протекания колебательной релаксации в соплах показывает, что с точки зрения состояния колебательных степеней свободы молекул начальные условия на срезе сопла в зависимости от параметра $p_0 D_*$ могут быть самыми различными. Поэтому ограничимся рассмотрением лишь таких условий, при которых течение в сопле согласно работе [5] близко к колебательно равновесному ($p_0 D_* \geqslant 10^3$ МПа·мм).

Рассмотрим особенности протекания колебательной релаксации в изоэнтропийном ядре сильно недорасширенной струи на примере истечения продуктов сгорания топлива $(CH_3)_2NNH_2 + -N_2O_4$ при коэффициенте избытка окислителя $\alpha = 0{,}85$. Конкретные условия расчета: $p_0 = 10$ МПа, $T_0 \approx 3500$ К, $F_a/F_* = 82{,}5$. Кинетические уравнения и скорости релаксационных процессов принимались такими же, как в работе [5]. Расчет проводился в одномерном приближении с заданными распределениями давления вдоль линий тока струи, которые определялись из расчета двумерного течения в струе в предположении равновесного возбуждения колебательных степеней свободы молекул.

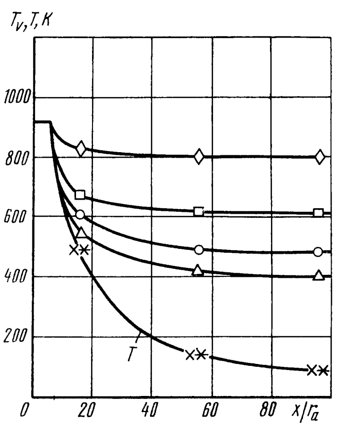


Рис. 3.69 Изменение температуры газа T и колебательных температур T_v компонентов вдоль оси струи:
○ — N_2; □ — CO; ◇ — NO; △ — CO_2 (ν_3); × — CO_2 (ν_1, ν_2); * — H_2O (ν_1, ν_2, ν_3)

На рис. 3.69 показано изменение вдоль оси струи колебательных температур T_v различных молекул. Вследствие резкого уменьшения давления и температуры газа колебательные температуры CO, N_2, H_2, NO и температура асимметричного типа колебаний $CO_2(\nu_3)$, на некотором расстоянии от среза сопла замораживаются, хотя и на различном уровне. В то же время колебательные температуры деформационных типов колебаний $CO_2(v_2)$ и $H_2O(\nu_2)$ следуют за температурой газа.

На других линиях тока градиенты газодинамических параметров больше, чем на оси струи, и замораживание происходит при более высоких значениях температуры.

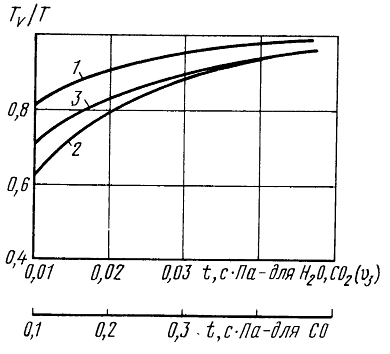


Рис. 3.70. Изменение колебательных температур компонентов за ударной волной: *1* — H_2O (ν_1, ν_2, ν_3), *2* — CO_2 (ν_3), *3* — CO

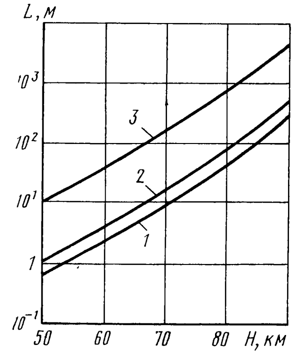


Рис. 3.71. Длина релаксационной зоны за ударной волной (обозначения как на рис. 3.70)

Рассмотрим особенности протекания колебательной релаксации за скачками уплотнения, образующимися в недорасширенной струе.

Будем считать для простоты, что до скачков уплотнения колебательные степени свободы молекул не возбуждены, давление и температура за скачком постоянны. На рис. 3.70 показано изменение колебательных температур различных молекул за скачком уплотнения при температуре газа $T=1000$ K. Колебательные температуры, отнесенные к температуре газа, построены в зависимости от комплекса $t=px/W$. Если принять в качестве характерного значения скорости в струе $W=3$ км/с, а давление положить равным давлению в невозмущенном спутном потоке, то можно в зависимости от высоты полета оценить длину релаксационной зоны, на которой $T_v=0{,}9T$. Результаты приведены на рис. 3.71. Видно, что при увеличении высоты длина релаксационной зоны резко возрастает.

Представленные результаты позволяют заключить, что с точки зрения состояния колебательных степеней свободы молекул продуктов сгорания течение в недорасширенных струях является существенно неравновесным как в области изоэнтропийного расширения, так и за скачками уплотнения. Поэтому в общем случае для корректного определения характеристик струй с учетом колебательной релаксации продуктов сгорания необходим двумерный неравновесный расчет, позволяющий учесть как влияние газодинамики на релаксационные процессы, так и влияние последних на газодинамические параметры струи.

В работе [34] численно рассчитано двумерное колебательно неравновесное течение в струе, расширяющейся в вакуум. В качестве объекта исследования выбрана смесь продуктов сгорания топлива $(CH_3)_2NNH_2+N_2O_4$ с коэффициентом избытка окислителя $\alpha=0,9$, давление в камере сгорания $p_0=5\cdot10^5$ МПа, температура в камере $T_0=3100$ К, геометрическая степень расширения сопла $F_a/F_*=4$, радиус выходного сечения сопла $r_a=0,01$ м. Учитывалось неравновесное протекание химических реакций и релаксация колебательных степеней свободы молекул в сопле и струе.

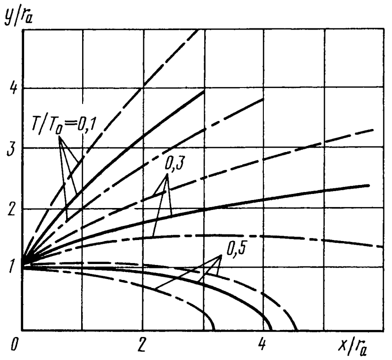


Рис. 3.72. Линии постоянной температуры в струе, истекающей в вакуум

Расчеты показали, что на выходе сопла химический состав смеси является практически замороженным и сохраняется неизменным в струе. Для иллюстрации влияния колебательной неравновесности на параметры газа на рис. 3.72 приведены линии постоянной температуры в струе в случае неравновесного (сплошные линии), равновесного (штриховые линии) и замороженного от среза сопла (штрихпунктирные линии) состояния колебательных степеней свободы молекул. Видно, что при данных условиях колебательная неравновесность заметно влияет на температуру газа (а также на давление). Ее влияние на плотность и скорость газа вблизи оси струи мало, однако в периферийной области отличие плотности от равновесных значений может достигать 40%.

С увеличением p_0 и (или) r_a течение в струе приближается к колебательно-равновесному. Например, при $r_a=0,1$ м максимальное отличие параметров газа от равновесных значений не превышает 4%.

Численный расчет неравновесного течения многокомпонентной смеси продуктов сгорания является достаточно трудоемким. Поэтому представляет интерес рассмотреть возможность использования приближенного подхода, когда сначала рассчитывается двумерная струя совершенного газа с некоторым эффективным показателем адиабаты, а затем процессы колебательной релаксации в одномерном приближении при известных распределениях давления вдоль линии тока струи.

Влияние колебательного энергообмена на параметры течения определяется величиной энергии, переходящей между колебательными и поступательными степенями свободы в процессе расширения газа. Дадим приближенную оценку этого влияния, сравнив параметры колебательно-равновесного и замороженного течений в случае истечения струи в вакуум.

Используем приближенную формулу для изменения плотности на оси струи вдали от среза сопла:

$$\varrho/\varrho_a = \frac{(\gamma_a+1)(\gamma_a-1)}{4} M_a^2 (x/r_a)^{-2}. \qquad (3.147)$$

Ее нетрудно получить из (1.57), считая $M_a \gg 1$. Поскольку внутренняя энергия газа на срезе сопла $e_a = p_a/[(\gamma_a-1)\varrho_a]$, а $M_a = W_a/\sqrt{\gamma_a p_a/\varrho_a}$, то с точностью до множителя $(\gamma_a+1)/2\gamma_a$, близкого к единице,

$$\varrho/\varrho_a = \frac{W_a^2/2}{e_a}(x/r_a)^{-2}. \qquad (3.148)$$

Следовательно, распределение плотности в струе определяется отношением кинетической энергии на срезе сопла к его внутренней энергии.

Если принять, что за срезом сопла течение является колебательно-замороженным, то часть внутренней энергии, соответствующая вкладу от колебаний молекул, не перейдет в струе в кинетическую энергию направленного движения. Фактически это эквивалентно уменьшению внутренней энергии газа на срезе сопла и согласно соотношению (3.148) приводит к увеличению плотности газа в струе по сравнению со случаем равновесного течения.

Отсюда следует, что различие в величине плотности в двух предельных случаях — замороженного (от среза сопла) и равновесного течений равно

$$\Delta\varrho/\varrho_e = \frac{\varrho_f - \varrho_e}{\varrho_e} = \frac{e_a^{(v)}/e_a}{1 - e_a^{(v)}/e_a},$$

где e_{va} — колебательная энергия газа на срезе сопла, индексы e и f указывают на равновесное и замороженное течение соответственно.

Влияние колебательного энергообмена на скорость газа в струе можно оценить с помощью уравнения энергии. Известно, что при расширении в вакуум скорость быстро стремится к максимальному значению $W_{\max}$. В равновесном течении $W_{\max e} = \sqrt{2H_a}$, колебательно-замороженном течении $W_{\max f} = \sqrt{2(H_a - e_a^{(v)})}$. Поэтому

$$\frac{\Delta W_{\max}}{W_{\max e}} = \frac{W_{\max e} - W_{\max f}}{W_{\max e}} = \frac{2e_a^{(v)}}{W_{\max e}^2\left(1 + \dfrac{W_{\max f}}{W_{\max e}}\right)} \approx \frac{e_a^{(v)}}{W_{\max e}^2}.$$

На рис. 3.73 приведены в зависимости от температуры газа на срезе сопла значения $\Delta\varrho/\varrho_e$, $\Delta W_{\max}/W_{\max e}$. Расчеты проведены применительно к составу продуктов сгорания $(CH_3)_2NNH_2+N_2O_4$ при $\alpha=0{,}85$, $p_0=10$ МПа, $D_*=110$ мм. Из рис. 3.73 следует, что для сопл с $T_a<1300$ К различие между параметрами в случае колебательно равновесного и замороженного течений должно быть невелико. Это подтверждается непосредственными расчетами двумерного течения в струе в двух предельных режимах.

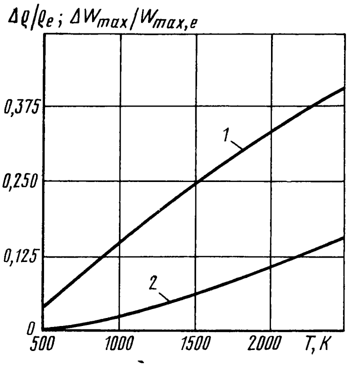


Рис. 3.73. Зависимости $\Delta\varrho/\varrho_e$ и $\Delta W_{max}/W_{max\ e}$ от температуры на срезе сопла:

1 — $\Delta\varrho/\varrho_e$, *2* — $\Delta W_{max}/W_{max e}$

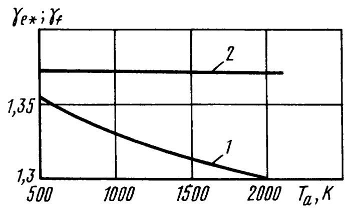


Рис. 3.74. Сравнение значений $\gamma_{e,*}$ и γ_f:

1 — $\gamma_{e,*}$; *2* — γ_f

В равновесном или замороженном течении можно ввести показатель изоэнтропы $\gamma=d\ln p/d\ln\varrho$. В случае замороженного течения $\gamma=\gamma_f$

$$\gamma_f=\left[1-\frac{1}{\sum\limits_i r_i n_i}\right]^{-1},$$

где $r_i=c_i\dfrac{M^\circ}{M_i^\circ}$ — массовые концентрации i-го компонента смеси; $n_i=5/2$ — для одноатомных компонентов; $n_i=7/2$ — для двухатомных и линейных трехатомных; $n_i=4$ — для трехатомных.

В случае колебательно равновесного течения показатель изоэнтропы γ_e зависит не только от состава смеси, но и температуры газа. Можно ввести эффективное значение показателя изоэнтропы γ_{e*}

$$\gamma_{e*}=\frac{\ln p_2/p_1}{\ln\varrho_2/\varrho_1},$$

где p_2, ϱ_2 и p_1, ϱ_1 — соответственно конечные и начальные значения давления и плотности на участке расширения газа. Если зафиксировать конечное значение температуры, например $T_2=100$ К, а в качестве начального значения принять температуру газа T_a на срезе сопла, то можно рассчитать зависимость γ_{e*} от T_a:

$$\gamma_{e*} = \left[1 - \frac{R^{\circ} \ln T_2/T_a}{\sum\limits_i \int\limits_{T_a}^{T_2} r_i \frac{dh_i}{dT}} \right]^{-1},$$

где R° — универсальная газовая постоянная; h_i — молярные энтальпии компонентов смеси.

На рис. 3.74 приведены зависимости γ_{e*} от T_a для топлива $(CH_3)_2NNH_2+N_2O_4$. Здесь же приведены значения γ_f Видно, что значения γ_{e*} и γ_f близки друг к другу и заметно больше, чем эффективный показатель изоэнтропы для расширения продуктов сгорания в сопле, который обычно равен $\gamma \leqslant 1{,}2$.

Для оценки влияния колебательной неравновесности на газодинамические параметры струи при расширении в вакуум на рис. 3.75 сравнены распределения плотности вдоль оси струи, полученные из двумерного расчета для трех случаев: равновесное расширение с $\gamma=\gamma_e(T)$ (кривая *1*), расширение совершенного газа с $\gamma=1{,}33$ (обозначено $\times$) и с $\gamma=1{,}37$ (обозначено $\bigcirc$). Химический состав продуктов сгорания соответствует топливу $(CH_3)_2NNH_2+N_2O_4$ при $\alpha=0{,}85$, $p_0=10$ МПа, $D_*=110$ мм, отношение площадей сопла таково, что температура на срезе $T_a=1000$ К. При этих условиях $\gamma_{e*}=1{,}33$ и $\gamma_f=1{,}37$.

Результаты расчетов показывают, что, во-первых, течение с равновесно возбужденными колебаниями молекул, для которого показатель изоэнтропы является переменным, удовлетворительно моделируется течением совершенного газа с $\gamma=\gamma_{e*}$, и, во-вторых, различие между распределениями плотности в двух предельных случаях равновесного и замороженного состояний колебательных степеней свободы молекул невелико.

Эти выводы относятся не только непосредственно к оси струи, но и ко всему ядру струи, в котором распространяется основная (не менее 90%) масса газа, вытекающего из сопла. В периферийной области струи в окрестности граничной линии тока различие между параметрами равновесного и замороженного течений может быть существенным. Дело в том, что в замороженном течении поток поворачивается при расширении в вакуум на меньший угол, чем в равновесном течении $(\gamma_f > \gamma_{e*})$

Поэтому вдали от оси струи плотность газа может быть отлична от нуля в предположении равновесного течения и равна нулю в предположении замороженного (как впрочем и в общем случае неравновесного течения).

Расчеты сильно недорасширенных струй, истекающих в сверхзвуковой спутный поток, показали, что различие в геометрических размерах и распределениях газодинамических параметров при изменении γ в диапазоне значений от замороженного до равновесного случая также невелико. Для иллюстрации на рис. 3.76 показана форма начального участка струи при $\gamma=\gamma_{e*}$ и $\gamma=\gamma_f$.

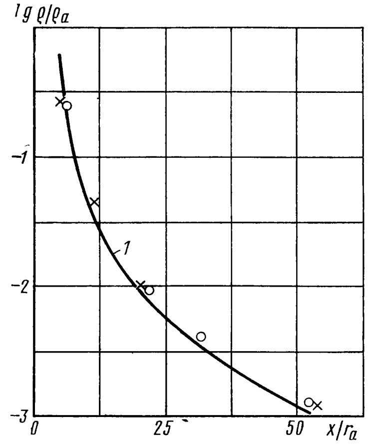


Рис. 3.75. Сравнение распределений плотности в колебательно равновесном и замороженном течениях

При заданных условиях реализуется определенная степень неравновесности течения. Чем больше параметр $p_a D_a$, тем ближе течение к равновесному. Очевидно, что в любом случае пара-

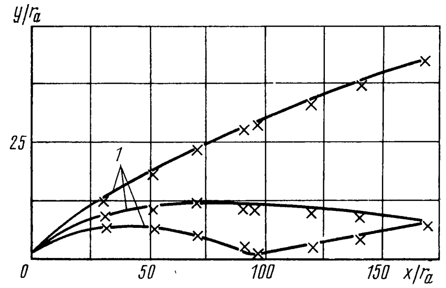


Рис. 3.76. Форма начального участка спутной струи при колебательно равновесном и замороженном течениях ($M_\infty = 7{,}5$, $n=300$):

1 — $\gamma_{e*}=1{,}33$; × — $\gamma_f=1{,}37$

метры струи будут находиться между значениями, соответствующими двум предельным режимам течения. Как было показано ранее, в определенном диапазоне значений температуры газа на срезе сопла (например, для рассмотренного топлива при $T_a<1300$ К) различие в параметрах струи в случае равновесного и замороженного течения невелико. Следовательно, при этих условиях газодинамику струи в первом приближении можно рассчитывать, используя модель совершенного газа со значением γ, равным γ_{e*} или γ_f.

3.3.3. Химическая релаксация в недорасширенных струях ЛА (модель вязкого и теплопроводного газа)

В выхлопе реактивных двигателей содержится заметное количество недогоревших компонентов топлива, поскольку коэффициент избытка окислителя подаваемой в камеру сгорания смеси, как правило, меньше единицы ($\alpha\approx0{,}8\ldots0{,}9$). При смешении недогоревших компонентов с кислородом спутного потока воздуха может происходить их догорание, приводящее к изменению химического состава продуктов сгорания и температуры газа в струе. Вследствие уменьшения давления и температуры газа при расширении в струе этот процесс догорания обычно имеет неравновесный характер.

Наиболее полное исследование химически неравновесных течений в сверхзвуковых недорасширенных турбулентных струях, распространяющихся в сверхзвуковом спутном потоке, проведено П. К. Осмининым. Численный метод, использованный в этом исследовании, описан в работе [54].

Рассмотрим основные результаты этого исследования.

Влияние неравновесного догорания на газодинамические параметры струи. Известно, что процесс неравновесного горения топлива в окислителе является довольно сложным процессом, происходящим в результате цепочки взаимосвязанных реакций диссоциации, обмена и рекомбинации. Такой процесс условно может быть разделен на две стадии: индукции и собственно горения. В начальный промежуток времени, называемый также временем индукции, преобладающими являются реакции диссоциации, обеспечивающие разложение топлива на радикалы.

Таблица 3.3

Совокупность химических реакций и константы скоростей для системы C, O. H и N

№ по пор	Реакция	A, (см^3/моль)$^{s-1}\cdot$с$^{-1}$	B	E, кал/моль
1	$CO+O+M \rightarrow CO_2+M$	$3{,}5\cdot 10^{14}$	0	2100
2	$H+H+M \rightarrow H_2+M$	$1{,}4\cdot 10^{20}$	1,5	0
3	$O+O+M \rightarrow O_2+M$	$5{,}5\cdot 10^{17}$	0,87	0
4	$OH+H+M \rightarrow H_2O+M$	$1{,}2\cdot 10^{20}$	1,0	0
5	$O+H+M \rightarrow OH+M$	$3{,}3\cdot 10^{18}$	0,5	0
6	$N+N+M \rightarrow N_2+M$	$2{,}7\cdot 10^{16}$	0,5	0
7	$N+O+M \rightarrow NO+M$	$3{,}3\cdot 10^{15}$	0	0
8	$OH+CO \rightarrow CO_2+H$	$2{,}5\cdot 10^{12}$	0	5100
9	$OH+H_2 \rightarrow H_2O+H$	$1{,}1\cdot 10^{14}$	0	8600
10	$OH+OH \rightarrow H_2O+O$	$1{,}0\cdot 10^{13}$	0	1200
11	$H_2+O \rightarrow OH+H$	$1{,}3\cdot 10^{13}$	0	9860
12	$O_2+H \rightarrow OH+O$	$2{,}2\cdot 10^{14}$	0	16550
13	$N_2+O_2 \rightarrow NO+NO$	$5{,}2\cdot 10^{13}$	0	107000
14	$NO+N \rightarrow N_2+O$	$3{,}0\cdot 10^{13}$	0	200
15	$NO+O \rightarrow O_2+N$	$1{,}1\cdot 10^{13}$	0	41700

Примечание. Константа скорости прямой реакции $K_+(T)=AT^{-B}\exp(-E/R^\circ T)$ M — некоторая частица; s — число частиц, вступающих в реакцию

Для углеводородных топлив такими реакциями являются обратные реакциям 2, 3, 6, 7, а также реакция 13 в табл. 3.3. Эти реакции идут с поглощением тепла. После накопления достаточного количества радикалов (типа CO, OH, H, O для углеводородных топлив) преобладающими оказываются реакции рекомбинации, превращающие накопленные радикалы в продукты сгорания. Такие реакции идут с выделением теплоты и обеспечивают собственно горение. Для углеводородных топлив к ним относятся реакции 1, 4, 8, 9, 10 в табл. 3.3.

Указанный механизм может в значительной степени повлиять на распределение температуры в струе, а через температуру — и на другие параметры.

С целью выяснения этого факта было проделано два расчета струи при наличии неравновесных химических реакций, приведенных в табл. 3.3, и с «замороженным» составом, т. е. в предположении равенства нулю членов F_i в уравнениях неразрывности химических компонентов системы (1.42). Для расчетов была выбрана струя со следующими начальными параметрами: число Маха на срезе сопла $M_a=3{,}4$; число Маха набегающего потока $M_\infty=3$; температура на срезе сопла $T_a=1800$ K; температурный фактор $T_\infty/T_a=0{,}118$; степень нерасчетности $n=p_a/p_\infty=12$.

В качестве газа, истекающего из сопла, были выбраны продукты разложения $(CH_3)_2NNH_2+N_2O_4$. Состав этого газа приведен ниже.

Компонент	H_2	O_2	H_2O	CO	O	OH	H	CO_2	N_2
c_i	$0{,}2\cdot10^{-2}$	$0{,}19\cdot10^{-2}$	0,282	$0{,}7\cdot10^{-1}$	$0{,}16\cdot10^{-3}$	$0{,}24\cdot10^{-2}$	$0{,}14\cdot10^{-4}$	0,281	0,360

В качестве газа спутного потока был выбран воздух. На рис. 3.77 приведены осевые распределения температуры в начальном и переходном участках струи. Из графика видно, что в начальном участке ($0\leqslant x/r_a\leqslant15$) температура на оси не зависит от учета протекания химических реакций. В переходном участке, как только слой смешения достигает оси, начинается возрастание температуры за счет горения. К концу переходного участка разница в температуре «замороженного» и неравновесного течений достигает 33%. Горение практически заканчивается при $x/r_a\approx45$, о чем свидетельствуют графики изменения относительной избыточной концентрации $\Delta c=(c_i-c_{i\infty})/(c_{ia}-c_{i\infty})$ для CO и H_2 в неравновесном и замороженном течениях, также приведенные на рис. 3.77. Здесь c_i — текущее значение массовой концентрации i-го компонента; c_{ia} — значение c_i на срезе сопла; $c_{i\infty}$ — значение c_i в невозмущенном спутном потоке. Для CO и H_2 значения c_{ia} указаны выше, а $c_{i\infty}=0$.

Отметим, что концентрация CO сначала убывает до значения $\overline{\Delta c}\approx0{,}9$ непосредственно вблизи среза сопла, а затем замораживается и остается постоянной до прихода на ось слоя смешения. Здесь уместен следующий комментарий, чтобы согласовать этот

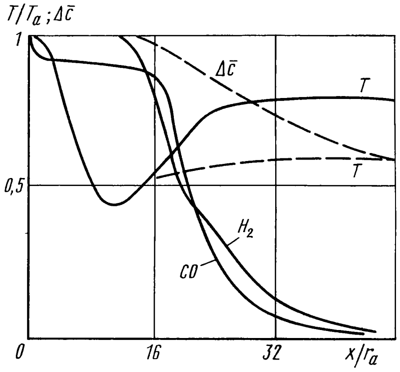


Рис. 3.77 Распределение температуры и концентраций CO и H_2 на оси струи ($n=12$):

______ химически неравновесное течение,
- - - — зомороженное течение

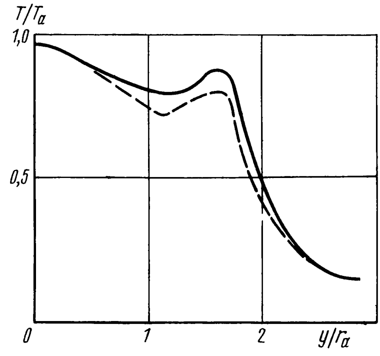


Рис. 3.78. Профиль температуры в начальном участке струи ($n=12$) при $x/r_a=3$:

______ химически неравновесное течение,
- - - —замороженное течение

результат с выводом, сделанным в подразд. 3.3.2 о замороженности концентраций основных компонентов продуктов сгорания, в том числе CO, в области невязкого течения в недорасширенной струе.

В рассматриваемом здесь случае было принято, что струя истекает из сопла с $\theta_a=0$. У такого сопла непосредственно за выходным сечением существует область течения OAO_1 (см. рис. 1.8) с нулевыми градиентами газодинамических параметров, ограниченная вниз по потоку первой характеристикой OO_1 волны разрежения, образующейся в недорасширенной струе на кромке выходного сечения сопла. Поскольку на срезе сопла присутствуют радикалы O и OH, а температура достаточно высока ($T_a=1800$ K), то в безградиентном потоке будут протекать реакции 1 и 8 (см. табл. 3.3), приводящие к уменьшению концентрации CO, хотя в расширяющемся потоке внутри сопла они могли и заморозиться.

У сопл реальных реактивных двигателей $\theta_a>0$, течение в области OAO_1 сопровождается падением давления и реакции, если они заморозились внутри сопла, обычно не размораживаются.

Внутри слоя смешения горение CO и H_2 возникает уже в начальном участке струи и продолжается в переходном участке. На рис. 3.78 сравниваются в сечении $x/r_a=3$ поперечные профили температуры в замороженном и неравновесном течениях, а на рис. 3.79 — профили концентраций CO. Из рис. 3.78 видно, что в результате протекания химических реакций происходит увеличение температуры внутри слоя смешения. Положение слоя смешения указывает профиль относительной избыточной концентрации в замороженном течении. Можно отметить, что в средней части слоя смешения ($y/r_a\approx1,75$) увеличение температуры

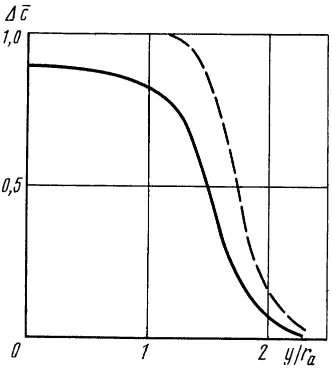


Рис. 3.79. Профиль концентрации CO в начальном участке струи ($n=12$) при $x/r_a=3$:

______ химическое неравновесное течение;
- - - — замороженное течение

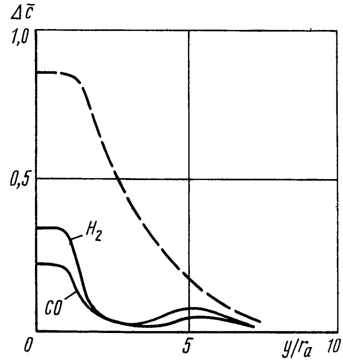


Рис. 3.80. Профили концентраций CO и H_2 в переходном участке струи ($n=12$) при $x/r_a=25$:

______ химически неравновесное течение,
- - - — замороженное течение

вследствие догорания CO и H_2 даже на небольшом расстоянии от среза сопла $x/r_a=3$ составляет примерно 20%.

На рис. 3.80 показаны поперечные профили относительных избыточных концентраций CO и H_2 в переходном участке при $x/r_a=25$. Из сравнения профилей концентраций горящей и «замороженной» струй видно, что горение происходит по всей толщине слоя смешения. На периферии оно происходит более вяло, чем на середине слоя смешения (подъем кривых концентраций CO и H_2 в окрестности $y/r_a=5$) вероятно из-за низкой температуры набегающего потока.

Влияние высоты полета на догорание. Полет ЛА на активном участке, т. е. с момента старта до выключения двигателей характеризуется изменением ее скорости в широких пределах, а также изменением высоты полета и связанным с этим изменением температуры спутного потока. В силу этого интересно рассмотреть влияние на догорание совместного действия таких параметров, как число Маха спутного потока, температурный фактор и нерасчетность при сохранении постоянными характеристик на срезе сопла.

Начальный участок разгона до высот порядка 5...10 км характеризуется малой (дозвуковой или околозвуковой) скоростью спутного потока, умеренным значением температурного фактора, а также степенью нерасчетности, близкой к единице. В этих условиях волновая структура струи проявляется слабо, она является фактически изобарической с развитым слоем смешения, в котором при наличии достаточно высоких температуры и давления может идти интенсивное догорание. С увеличением высоты полета давление набегающего потока падает и, как следствие, растет степень нерасчетности. При этом слой смешения на начальном участке становится более тонким по отношению к увеличивающемуся поперечному размеру струи и зона догорания должна сместиться в переходный участок струи, где слои смешения смыкаются на оси. Поскольку p_∞ становится меньше, а давление в слое смешения по порядку величины совпадает с ним, скорость химических реакций, пропорциональная давлению в квадрате или кубе, уменьшается; как следствие, должна уменьшиться и интенсивность догорания. Наконец, на достаточно больших высотах давление спутного потока, а следовательно, и давление в слое смешения может упасть столь низко, что химические реакции практически заморозятся, т. е. характерное время их протекания окажется много больше характерного времени газодинамических процессов. Следствием этого должна явиться независимость поля газодинамических параметров от наличия химических реакций в газе.

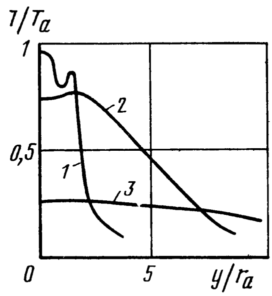


Рис. 3.81. Профили температуры в трех сечениях струи ($n=12$):
1 — $x/r_a=3$; 2 — $x/r_a=30$, 3 — $x/r_a=106$

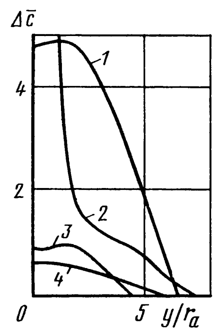


Рис. 3.82. Профили концентраций компонентов в переходном участке струи ($n=12$) при $x/r_a=30$:
1 — O; 2 — H, 3 — OH, 4 — NO

Для проверки этих рассуждений было проделано три расчета струи, описанной ранее, с варьированием числа Маха спутного потока, температурного фактора и степени нерасчетности, с целью моделирования изменения высоты полета. В первом расчете полагалось $M_\infty=1$, $T_\infty/T_a=0{,}147$, $n=1$, что соответствует высоте полета $H=3$ км, во втором расчете параметры спутного потока были $M_\infty=3$, $T_\infty/T_a=0{,}118$, $n=12$, что моделирует полет на высоте $H=20$ км. В третьем расчете в качестве параметров набегающего потока были выбраны следующие: $M_\infty=5$, $T_\infty/T_a=0{,}14$, $n=220$, что соответствует высоте полета $H=40$ км. Для выявления изменения параметров из-за наличия химических реакций эти расчеты были проделаны как с учетом химической неравновесности, так и в предположении замороженного состава газа. Результаты расчетов приведены на рис. 3.77 ... 3.84. На рис. 3.77 ... 3.82

изображены результаты второго расчета, соответствующего $H=20$ км. Эти результаты подробно описаны ранее, поэтому остановимся подробнее на рис. 3.83, 3.84.

На рис. 3.83 изображены продольные распределения температуры на оси выхлопной трубы двигателя, летящего на высоте $H=3$ км. Сравнение двух графиков для неравновесного и замороженного случаев показывает, что увеличение осевой температуры в результате химических реакций начинается сразу после смыкания слоев смешения на оси ($x/r_a \approx 3$) и достигает значительной величины. Так в сечении $x/r_a=13$ прирост температуры вследствие догорания составляет почти 60%, т. е. вдвое больше, чем на высоте $H=20$ км (см. рис. 3.77). Приведенные на рис. 3.83 продольные профили избыточной концентрации компонентов CO, H_2 в горящей и замороженной струях позволяют заметить, что эти компоненты интенсивно расходуются на участке $4 \leqslant x/r_a \leqslant 11$, а к сечению $x/r_a=15$ догорание в значительной мере заканчивается, поскольку основные горящие компоненты оказываются практически израсходованными.

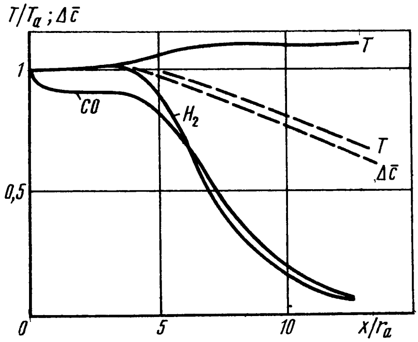


Рис. 3.83 Распределения температуры и концентраций CO и H_2 на оси струи ($n=1$):

——— химически неравновесное течение,
- - - — замороженное течение

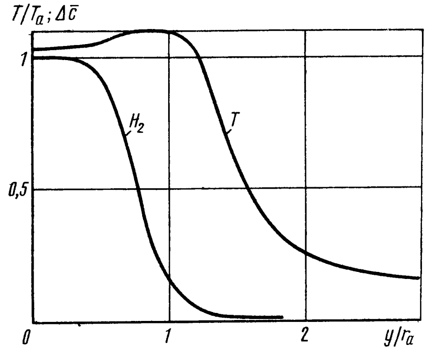


Рис. 3.84. Профили температуры и концентрации H_2 в сечении струи $x/r_a=3$ ($n=1$)

Графики поперечного распределения температуры и концентрации молекулярного водорода на рис. 3.84 в сечении $x/r_a=3$ указывают на то, что до момента пересечения слоя смешения с осью догорание происходит на периферии струи.

Из результата расчета выхлопной струи на высоте $H=40$ км. ($n=200$) следует, что изменение температуры в результате неравновесных процессов крайне незначительно и не превышает 8% в тонком слое смешения на периферии струи. На оси же реакции практически заморожены. В самом деле, по сравнению с высотой $H=20$ км давление спутного потока падает в 18 раз.

Поскольку разница в давлениях в слое смешения того же порядка, а скорость химической реакции пропорциональна для бимолекулярных реакций квадрату давления, а для тримолекулярных — кубу, то характерное время химической реакции увеличивается не менее чем в 360 раз. Характерный же линейный размер задачи, а следовательно, и характерное время газодинамических процессов увеличиваются пропорционально $\sqrt{n}$, т. е. только в $\sqrt{18} \approx 4$ раза. Это приводит к тому, что время химических реакций оказывается больше характерного газодинамического времени и реакции практически замораживаются.

Из сказанного можно сделать вывод о том, что догорание наиболее интенсивно на малых высотах, хотя и происходит в малом объеме газа. С увеличением высоты зона догорания перемещается из основного в переходный участок струи, протяженность ее увеличивается, но максимальная температура несколько падает. На высотах порядка $H=40$ км химические реакции замораживаются и не оказывают заметного влияния на поле газодинамических параметров.

Рассмотрим вопрос о токсичности горящей струи, а именно образование угарного газа в горящей сверхзвуковой струе, истекающей из сопла двигателя, работающего на углеводородном топливе. Угарный газ образуется из двуокиси углерода в реакциях, обратных реакциям 1, 8, приведенным в табл. 3.3. Анализ константы равновесия приводит к заключению, что реакции образования CO будут преобладать над реакциями разложения при достаточно высоких температурах $T>3000$ K, т. е. могут идти только в камере сгорания. Поскольку в выхлопной струе характерные температуры $T \lesssim 2000$ K, в ней могут идти только реакции догорания CO с образованием двуокиси углерода. Вместе с тем при низких температурах порядка 300 K эти реакции замораживаются и угарный газ перестает превращаться в двуокись углерода. В условиях наземных испытаний ракетного двигателя имеем выхлопную струю достаточно высокой температуры ($T \sim 1500 \ldots 2000$ K), истекающую в холодный воздух ($T \lesssim 300$ K). Поскольку можно ожидать, что на периферии слоя смешения в зоне низкой температуры реакции заморозятся и CO поступит в окружающую атмосферу в достаточно высокой концентрации.

С целью выяснения этого обстоятельства рассмотрим распределение концентрации CO в выхлопной струе, истекающей в спутный поток с параметрами: $M_\infty=1$, $T_\infty/T_a=0{,}147$, $n=p_a/p_\infty=1$, т. е. в условиях, близких к условиям наземных испытаний.

На рис. 3.83 приведено распределение избыточной концентрации CO вдоль оси струи. Из графика видно, что в зоне интенсивного догорания ($4 \leqslant x/r_a < 12$) концентрация угарного газа резко уменьшается. При $x/r_a \geqslant 12$, когда основная часть CO выгорела, его концентрация начинает падать медленнее. Вместе с тем,

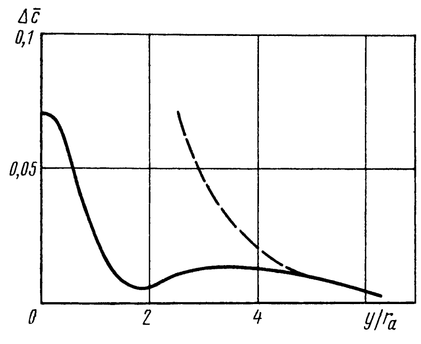


Рис. 3.85. Влияние догорания на концентрацию CO в основном участке струи ($n=1$) при $x/r_a=13$:
——— химически неравновесное течение;
- - - — замороженное течение

судя по высокой температуре в этой зоне и достаточно высокому давлению ($p \approx 10^5$ Па), догорание продолжается и дальше, хотя и менее интенсивно из-за малой концентрации его.

На рис. 3.85 приведены поперечные профили избыточной концентрации CO в сечении $x/r_a = 13$ для горящей и для замороженной струй. Из графика видно, что если внутри струи ($0 \leqslant y/r_a \leqslant 1{,}75$) догорание CO идет достаточно успешно, то на периферии оно происходит медленнее, что приводит к подъему кривой $\Delta\bar{c}$ на интервале $2 < y/r_a < 6$. Из сравнения с профилем замороженной концентрации видно, что при $y/r_a > 5$ графики совпадают, что означает, что на этом интервале догорания не было вовсе. При этом концентрация угарного газа оказывается равной $0{,}58 \cdot 10^{-3}$ кг/м^3. Для сравнения: предельно допустимая концентрация (ПДК) угарного газа в рабочей зоне по санитарным нормам составляет 20 мг/м^3. Таким образом, на периферии струи ПДК превышена почти в 30 раз.

Из сказанного можно сделать вывод о том, что выхлопная струя энергетической установки, в частности ракетного двигателя, может оказаться поставщиком большого количества токсичных веществ. Из расчетов следует, что угарный газ поставляется в атмосферу в основном низкотемпературной частью выхлопной струи. В горячей зоне струи угарный газ выгорает в достаточной мере полностью.

3.3.4. Двухфазные недорасширенные сверхзвуковые струи

Присутствие в продуктах сгорания реактивных двигателей мелкодисперсных частиц влияет на динамические, оптические, радиофизические и другие характеристики струи. Поэтому изучение двухфазных течений в струях является весьма актуальной задачей.

В последние годы задачи аэромеханики, энергетики, химической технологии стимулировали интерес к теоретическим и экспериментальным исследованиям неоднофазных течений. В частности, достаточно подробно изучено двухфазное течение в соплах.

В то же время, несмотря на актуальность вопроса, изучение неизобарических струйных двухфазных течений в настоящее время находится еще в первоначальной стадии накопления результатов. Разработаны численные методы расчета двухфазных неизобарических струй невязкого газа (вязкость и теплопроводность газа учитываются только при взаимодействии между газом и частицами). Однако систематические исследования отсутствуют, а опубликованные результаты, в первую очередь, можно рассматривать как иллюстрацию возможностей методов.

В двухфазных струях вязкого газа трудности расчета течения чистого газа усугубляются тем, что присутствие частиц изменяет характеристики турбулентного перемешивания. Методы расчета вязких неизобарических двухфазных струй еще не разработаны.

В двухфазном течении параметры частиц зависят от поля течения газа и, в свою очередь, поле течения газа зависит от движения частиц. Поэтому в строгой постановке необходимо совместно решать уравнения движения газа с дополнительными членами, учитывающими динамическое и тепловое взаимодействие фаз, и уравнения движения частиц. Это существенно усложняет математическую модель струи.

Вместе с тем можно выделить два предельных случая, когда допустимо заранее приближенно учесть взаимодействие между частицами и газом и тем самым свести задачу к раздельному решению уравнений для газовой фазы (уже без дополнительных членов) и частиц. Первый предельный случай — это случай сильного взаимодействия между частицами и газом, когда реальное течение газа близко к равновесному, в котором частицы оказывают наиболее сильное обратное влияние на газ. Такая ситуация имеет место при течении двухфазной смеси в сопле. Известно [44], что даже при размерах частиц до 20 мкм и массовой концентрации частиц в смеси $z<0{,}6$ параметры газа в неравновесном двухфазном течении не более чем на 5 ... 10% отличаются от равновесных, вычисленных с использованием «эффективного» показателя адиабаты равновесной двухфазной смеси

$$\gamma^\circ=\gamma\frac{1-z(1-c^\circ/c_p)}{1-z(1-\gamma\, c^\circ/c_p)}, \tag{3.149}$$

где γ — показатель адиабаты чистого газа; c° — теплоемкость частиц; c_p — изобарическая теплоемкость газа. Поэтому в данном случае возможен приближенный подход, при котором производится раздельное решение уравнений для газовой фазы и частиц.

Второй предельный случай — обратное влияние частиц на газ полностью отсутствует. В этом случае поле течения газа также может быть рассчитано независимо от частиц с использованием показателя адиабаты чистого газа γ. Очевидно, что такая ситуация может иметь место в сильно недорасширенных струях. В работе [42] на основе рассмотрения одномерного двухфазного течения от источника показано, что если степень расширения сопла достаточно большая ($M_a\sim 3\ldots 4$), то обратное влияние частиц на параметры газа незначительно, а область влияния ограничена длиной (5 ... 20) r_a. Поэтому в первом приближении задачу о расчете недорасширенной двухфазной струи можно разделить на две: 1) определение параметров газовой фазы без учета обратного влияния частиц, 2) расчет параметров частиц в известном поле течения газа. Первую задачу можно решить одним из разработанных численных методов [54]. В результате такого расчета во всех точках поля течения струи известны параметры газа.

При известных параметрах газа составляющие скорости частиц u_p, v_p, температуру частиц T_p и их траектории $y_p=y_p(x)$ можно определить путем численного интегрирования следующей системы уравнений

$$u_p\frac{du_p}{dx}=f_x=\frac{3}{4}\frac{\mu C_D \mathrm{Re}}{\varrho^\circ d_p^2}(u-u_p)\;; \tag{3.150}$$

$$u_p \frac{dv_p}{dx} = f_y = \frac{3}{4} \frac{\mu C_D \mathrm{Re}}{\varrho^\circ d_p^2} (v - v_p) \; ; \tag{3.151}$$

$$u_p \frac{dT_p}{dx} = \frac{q}{c^\circ} = \frac{6\mu c_p \mathrm{Nu}}{\varrho^\circ c^\circ d_p^2 \mathrm{Pr}} (T_r - T) \; ; \tag{3.152}$$

$$\frac{dy_p}{dx} = \frac{v_p}{u_p} . \tag{3.153}$$

В этих уравнениях d_p — диаметр частицы; ϱ° — плотность вещества частицы; c_p и c° — теплоемкости газа и частицы соответственно; $T_r = T + \frac{|\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}_p|^2}{2_p}$ — температура торможения относительного потока; C_D — коэффициент сопротивления частицы, Re, Nu, Pr — числа Рейнольдса, Нуссельта и Прандтля соответственно, при этом

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho |\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}_p| d_p}{\mu} ; \qquad Nu = \frac{a d_p}{\gamma} ; \quad Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda}$$

где α — коэффициент теплоотдачи; μ и λ — коэффициенты вязкости и теплопроводности.

Коэффициент сопротивления зависит от чисел Re и $M = |\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}_p| a$ (где $a = \sqrt{\gamma p / \varrho}$ — скорость звука в газе), а число Нуссельта еще и от числа Pr. Для C_D и Nu известны полуэмпирические зависимости, учитывающие влияние разреженности, сжимаемости и инерционности при обтекании частицы [44].

Несмотря на то, что рассмотренный подход является приближенным, он позволяет проанализировать основные закономерности движения частиц в недорасширенных струях. Приведем некоторые результаты, полученные с помощью этого подхода применительно к истечению струи в вакуум и спутный сверхзвуковой поток. Учитывалась предыстория движения двухфазной смеси по соплу. Для этого были определены начальные параметры газа и частиц на срезе сопла с помощью приближенного подхода [26]. При этом были заданы: массовая концентрация частиц $z = 0{,}3$, показатель адиабаты чистого газа $\gamma = 1{,}2$, контур профилированного сопла с отношением площадей выходного и критического сечений $F_a / F_* = 21$ и относительной длиной сверхзвуковой части $L / D_* = 5{,}25$.

Если привести уравнения (3.150) ... (3.153) к безразмерному виду, выбрав в качестве характерных величин, например, диаметр критического сечения сопла и соответствующие параметры газа в этом сечении, то можно убедиться, что решение будет зависеть от следующей совокупности безразмерных критериев:

$$\mathrm{Re}_* = \frac{\rho_* a_* d_p}{\mu_*} , \; \mathrm{Pr}, \; \tau = \frac{\mu_* d_*}{\rho^\circ d_p^2 a_*} , \; \frac{c^\circ}{c_p} , \; \omega,$$

где ω — показатель в степенной зависимости вязкости от температуры; W_* — скорость газа в критическом сечении сопла.

В расчетах было прнято: $Pr=0{,}6$; $\omega=0{,}65$; $c^\circ/c_p=0{,}45$; $Re_*=27d_p$, $\tau=2{,}6/d_p^2$, где d_p выражено в мкм. Диаметр частиц варьировался в диапазоне $d_p=2{,}5\ldots10$ мкм.

На рис. 3.86 сплошными линиями показаны траектории частиц $d_p=2{,}5$ мкм в струе, истекающей в вакуум. Здесь же пунктирсм обозначены линии тока газа, имеющие общую координату с соответствующими траекториями частиц в выходном сечении сопла. Траектории частиц характеризуются значениями $\overline{G}_p=G_p/(G_p)_\Sigma$, где G_p — расход частиц, соответствующий данной

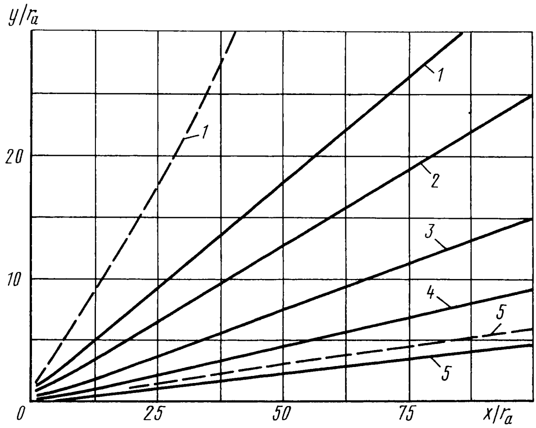


Рис. 3.86. Траектории частиц $d_p=2{,}5$ мкм (сплошные линии) и линии тока газа (пунктирные линии) при истечении струи в вакуум:
1 — $\overline{G}_p=0{,}65$, 2 — $\overline{G}_p=0{,}42$, 3 — $\overline{G}_p=0{,}16$, 4 — $\overline{G}_p=0{,}1$, 5 — $\overline{G}_p=0{,}01$

траектории; $(G)_\Sigma$ — суммарный расход частиц через сопло, что вследствие динамического запаздывания частиц их траектории разворачиваются на значительно меньший угол, чем соответствующая траектория газа. При увеличении d_p этот эффект проявляется сильнее.

Из рис. 3.86 следует также, что траектории частиц искривлены лишь в ближней области струи $x/r_a \lesssim 10\ldots20$, где происходит ускорение частиц газом, а далее они являются практически прямолинейными. Скорости частиц при удалении от среза сопла замораживаются. Чем больше диаметр частицы, тем сильнее ее скорость отличается от скорости газа (рис. 3.87).

Вследствие прямолинейности траекторий частиц и замораживания их скорости плотность частиц убывает, как в течении от пространственного источника. При этом полюс источника приближенно можно считать расположенным в центре выходного сечения сопла.

При удалении от среза сопла прекращается конвективный теплообмен между частицами и газом, в результате чего температура частиц замораживается. Замороженная температура частиц значительно превышает температуру газа (рис. 3.88). После прекращения конвективного теплообмена температура частиц может изменяться в результате излучения. Этот процесс на рис. 3.88 не учитывается.

Рассмотрим теперь результаты расчетов движения частиц в недорасширенных струях, истекающих в спутный сверхзвуковой

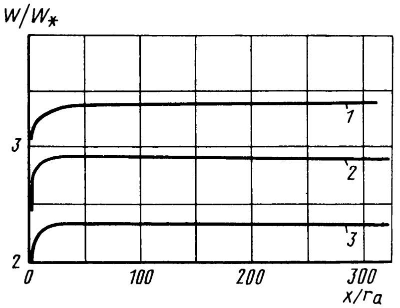


Рис. 3.87. Скорости частиц и газа на оси струи при истечении в вакуум: 1 — газ; 2 — d_p=2,5 мкм, 3 — d_p=10 мкм

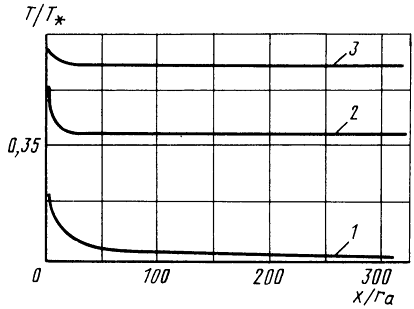


Рис. 3.88. Температуры частиц и газа на оси струи при истечении в вакуум (T_* — температура газа в критическом сечении сопла, остальные обозначения, как на рис. 3.87)

поток. В этом случае решение зависит не только от безразмерных параметров, характерных для струи чистого газа (n, γ_∞, M_∞), но и от начального отношения плотностей ϱ_a/ϱ_∞ или температур T_a/T_∞. Изменение параметра ϱ_a/ϱ_∞ (или T_a/T_∞) при прочих одинаковых условиях влияет на траектории и параметры частиц только в области спутного потока.

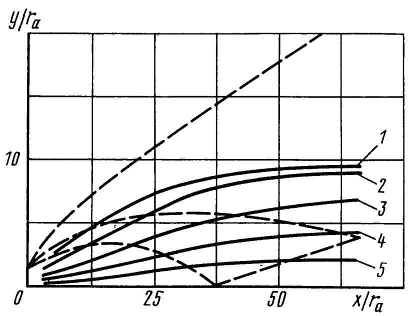


Рис. 3.89. Траектории частиц d_p=2,5 мкм (сплошные линии) и форма начального участка спутной струи (пунктирные линии). Обозначения траекторий, как на рис. 3.86

На рис. 3.89 показаны траектории частиц d_p=2,5 мкм на начальном участке струи при γ_∞=1,4, M_∞=5,5, n=63, T_a/T_∞=6,5. Траектории частиц изображены сплошными линиями, а пунктирными линиями изображены ударные волны и границы струи на начальном участке. Видно, что из-за отставания частиц по скорости от газа их траектории пересекают границу струи и попадают в спутный поток. Здесь происходит интенсивное торможение частиц (в рассматриваемых условиях скорость частиц больше скорости спутного потока) и искривление их траекторий в направлении к оси струи.

Величина запаздывания частиц от газа по скорости и температуре зависит от диаметра частицы и положения траектории в потоке. Для иллюстрации на рис. 3.90, 3.91 показано изменение скорости и температуры частиц d_p=2,5 мкм (сплошные линии) и газа (пунктирные линии) вдоль некоторых траекторий. При d_p=10 мкм запаздывание по скорости и температуре более значительно. Например, в конце начального участка температура частиц превышает температуру газа на величину, равную примерно 0,3 T_*. Кроме того, чем больше d_p, тем более равномерным является распределение параметров частиц в поперечном сечении.

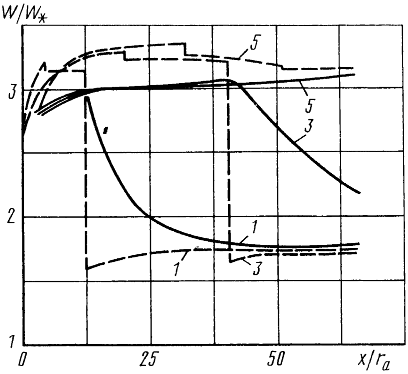


Рис. 3.90. Изменение скорости частиц d_p=2,5 мкм (сплошные линии) и газа (пунктирные линии) вдоль различных траекторий частиц. Обозначения траекторий, как на рис. 3.86

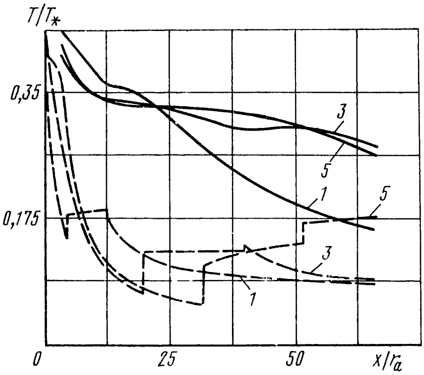


Рис. 3.91. Изменение температуры частиц d_p=2,5 мкм (сплошные линии) и газа (пунктирные линии) вдоль различных траекторий частиц. Обозначения траекторий, как на рис. 3.86

Вследствие интенсивного торможения спутным потоком распределение плотности частиц небольшого размера d_p=2,5 мкм в поперечном сечении струи оказывается существенно неоднородным. На рис. 3.92 показано изменение относительной плотности частиц различного размера в поперечном сечении в конце начального участка. Видно, что плотность частиц d_p=2,5 мкм на периферии струи почти на порядок превышает плотность на оси. В то же время распределение плотности частиц большого размера (d_p=10 мкм) близко к равномерному.

Неодинаковое рассеяние частиц различного размера в струе приводит к тому, что в случае полидисперсной двухфазной смеси функция распределения частиц по размерам существенно изменяется от точки к точке в поле течения. На рис. 3.93 показана зависимость от диаметра частицы параметра Φ, характеризующего изменение начальной функции распределения частиц по размерам на входе в сопло. Этот параметр показывает, во сколько раз изменяется в данной точке поля течения доля частиц с диаметром d_p по сравнению с долей частиц с d_p=2,5 мкм. На рис. 3.93 кривая *1* соответствует точке на оси сопла в выходном сечении, кривая *2* — точке на оси струи в конце начального участка, кривая *3* — точке вблизи границы струи газа (y/r_a=9) в конце начального участка.

Видно, что в выходном сечении сопла на оси доля крупных частиц возрастает по сравнению с первоначальной вследствие известного эффекта сепарации крупных частиц к оси при дви-

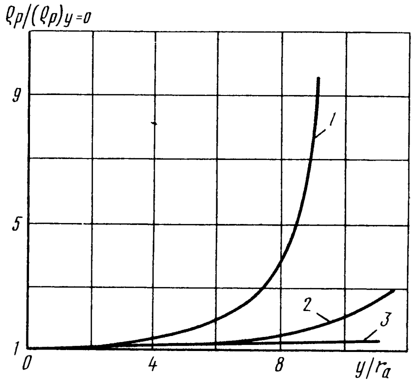


Рис. 3.92. Распределение относительной плотности частиц различного размера в конце начального участка струи, изображенной на рис. 3.89:
1 — d_p=2,5 мкм, *2* — d_p=5 мкм; *3* — d_p=10 мкм

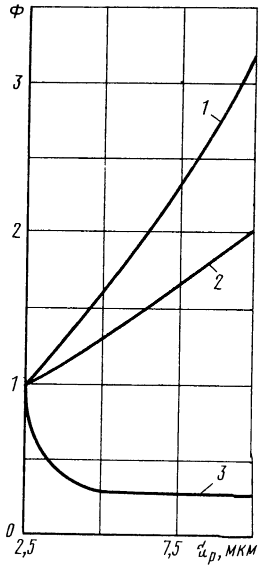


Рис. 3.93. Изменение начальной функции распределения частиц по размерам в различных точках поля течения:
1 — x/r_a=0, y/r_a=0; *2* — x/r_a=60, y/r_a=0, *3* — x/r_a=60, y/r_a=9

жении двухфазной смеси по соплу. В струе наблюдается обратный эффект — разлет крупных частиц от оси, однако на оси струи по-прежнему доля крупных частиц возрастает, хотя и в меньшей степени, чем на оси сопла.

На периферии струи наблюдается противоположная картина. Вследствие разлета крупных частиц и интенсивного торможения спутным потоком частиц небольшого размера доля последних существенно возрастает по сравнению с первоначальной на входе в сопло.

При увеличении степени нерасчетности (высоты полета ЛА) сжатые слои струи и спутного потока оказывают все более слабое влияние на траектории частиц. Движение частиц становится таким же, как при истечении струи в вакуум.

Обратимся к численным расчетам двухфазных неизобарических струй с учетом обратного влияния частиц на несущий газ.

В работе [51] решена задача истечения двухфазной недорасширенной струи в затопленное пространство. Система уравнений, описывающая стационарное сверхзвуковое течение монодисперсной взвеси в рамках модели двухкоростной и двухтемпературной сплошной среды, записанная в форме законов сохранения, была проинтегрирована маршевым методом с помощью разностной схемы сквозного счета Маккормака второго порядка точности. Расчет проводился в области сверхзвукового течения до диска Маха. На срезе сопла тепловое и динамическое запаздывание частиц отсутствовало.

На рис. 3.94, 3.95 приведены некоторые результаты расчетов для следующих условий: $M_a=3$; $n=20$; $d_p=10{,}50$ мкм; $z=0{,}2$, $0{,}4$, $0{,}6$; $r_a=10$ см; $A=18\mu_0 r_a/a_*\varrho^\circ=0{,}48\cdot10^{-6}$ см^2; μ_0 — вязкость газа при температуре торможения.

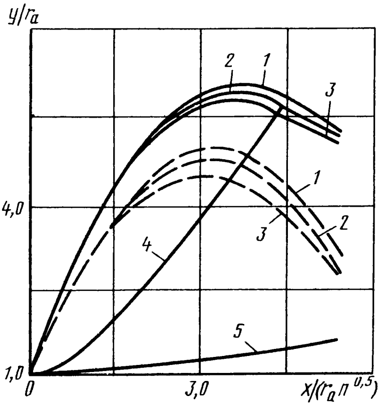


Рис. 3.94. Влияние массовой концентрации частиц в смеси на форму висячего скачка (пунктирные линии) и границы струи (сплошные линии)

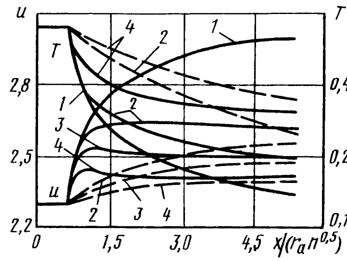


Рис. 3.95. Распределение продольной скорости и температуры газа (сплошные линии) и частиц $d_p=10$ мкм (пунктирные линии) на оси струи

На рис. 3.94 показана форма струй для различных концентраций частиц при $d_p=10$ мкм; *1* — $z=0$; *2* — $z=0{,}4$; *3* — $z=0{,}6$. Результаты для $z=0{,}2$ отдельно не приведены, поскольку в масштабе рисунка они практически совпадают со значениями для $z=0$. Сплошные линии показывают границу струи, пунктирные — висячую ударную волну. Видно, что при $d_p=10$ мкм влияние второй фазы на волновую структуру струи становится заметным при $z\geqslant0{,}4$. Частицы с $d_p=50$ мкм для всех значений z оказывают слабое влияние на форму струи. Линии *4*, *5* показывают положение предельных траекторий частиц (сепаратрис) соответственно для $d_p=10$ и 50 мкм. Отметим, что положение сепаратрис практически не зависит от концентрации частиц.

На рис. 3.95 приведены распределения продольной скорости u и температуры T вдоль оси струи для $d_p=10$ мкм при различных концентрациях частиц (кривые *1*, *2*, *3*, *4* соответствуют $z=0$, 0,2, 0,4, 0,6). Скорости отнесены к критической скорости звука, температура — к температуре торможения. Сплошные кривые указывают параметры газа, пунктирные — частиц. Наличие твердой фазы уменьшает скорость и число Маха газа по сравнению с течением чистого газа.

Аналогичная задача решалась в работе [6] другим численным методом. Исходная система уравнений записывалась в виде интегральных законов сохранения массы, составляющих количества движения и энергии для газа, а для частиц — в виде характеристических уравнений (3.150) ... (3.152), справедливых вдоль их траекторий. Система уравнений для газа решалась с помощью разностной схемы сквозного счета первого порядка точности, являющейся стационарным аналогом схемы С. К. Годунова, а уравнения для частиц интегрировались модифицированным методом Эйлера со вторым порядком точности.

Помимо численного метода работы [51] и [6] различаются в ряде моментов. В работе [6] не используется предположение о динамическом и тепловом равновесии между газом и частицами на срезе сопла. Необходимые начальные условия для расчета струи были определены в результате расчета двухфазного течения в сверхзвуковой части сопла, что позволило учесть предысторию движения частиц.

В работе [51] коэффициенты силового взаимодействия частиц с газом определялись по формулам для сплошного режима обтекания. Однако частицы (особенно мелкие) в процессе движения по соплу и в струе могут попасть в условия свободномолекулярного обтекания. В работе [6] для коэффициентов силового и теплового взаимодействия при произвольных числах Кнудсена используются интерполяционные формулы, асимптотически переходящие в выражения для двух предельных случаев — сплошного и свободномолекулярного обтекания.

В работе [6] расчеты проведены при небольших степенях нерасчетности, при которых отражение висячего скачка от оси является регулярным и возможен сквозной счет в этой области маршевым методом.

Расчеты показали, что с увеличением относительного содержания частиц точка прихода на ось висячего скачка приближается к срезу сопла. Этот результат качественно подтверждается экспериментальными данными. Параметры частиц в отличие от параметров газа изменяются поперек струи незначительно.

Движение частиц в струе может сопровождаться различными физическими процессами: затвердеванием, деформацией и дроблением, испарением или конденсацией, горением и т. д. Рассмотрению этих вопросов посвящен ряд работ.

В области гладкого изменения газодинамических параметров ряд релаксационных процессов (например, излучение или объемное затвердевание) не оказывают влияния на динамику частиц. Однако процесс затвердевания может существенно сказаться на динамике частиц при прохождении ударных волн из-за возможности сильной деформации и дробления жидкой частицы в отличие от затвердевшей.

Приближенный учет затвердевания частицы (в процессе затвердевания температура частицы сохраняется постоянной до тех пор, пока частица не отдаст газу теплоту затвердевания) указывает на существенное различие температур метастабильной (переохлажденной) и затвердевающей частиц. Поэтому для правильного определения эффектов двухфазной струи, зависящих от температуры частиц (например, ее излучения), необходимо учитывать реальную кинетику процесса затвердевания.

Размер крупной частицы, не находящейся в равновесии с паром по скорости и претерпевающей в процессе расширения смеси поверхностные фазовые (испарение) переходы, стабилизируется благодаря тому, что вследствие сильно нелинейной зависимости давления насыщенных паров от температуры понижение последней приводит к резкому падению скорости испарения [41, 55].

При большом относительном расходе частиц (сравнимом с расходом пара) их испарение вызывает существенное охлаждение смеси и заметное торможение пара. В конечном счете это приводит к смещению границы струи, сепаратрисы и висячего скачка в направлении от оси [55].

Учет догорания частиц в спутном потоке воздуха приводит к уменьшению диаметра струи, так как в результате тепло- и массоподвода происходит увеличение давления над границей струи. Например, при диаметре частиц $d_p=1$ мкм и относительном расходе $z=0{,}4$ максимальное поджатие струи составило 0,82. Из-за поджатия границы происходит увеличение давления и плотности газа в струе.

Догорание, изменяя размер частиц, приводит к изменению положения траекторий частиц. В частности, сепаратриса отклоняется к оси струи, поскольку спутный поток сильнее искривляет траектории более мелких частиц, чем крупных.

Если негорящие частицы при попадании в более холодный спутный поток воздуха охлаждаются до его температуры, то горение вызывает первоначально быстрое увеличение температуры частиц. При достижении некоторой достаточно высокой температуры теплоотдача к холодному газу внешнего потока становится соизмеримой с тепловыделением в результате горения и рост температуры уменьшается. После прекращения горения мелкие частицы с $d_p=0{,}1$ мкм быстро охлаждаются до температуры внешнего потока.

Экспериментальные исследования двухфазных струй весьма немногочисленные.

С. Льюисом и Д. Карлсоном (1964) проведено исследование влияния частиц на положение диска Маха. Установлено, что зависимость расстояния до диска Маха от нерасчетности остается такой же, как и в случае чисто газовой струи, а увеличение отношения расхода частиц к расходу газа $\varepsilon=z/(1-z)$ приводит к уменьшению расстояния согласно

$$X_S/D_a=\frac{0{,}69M_a(\gamma n)^{0{,}5}}{1+0{,}197M_a^{1{,}45}\varepsilon^{0{,}65}},$$

где γ — отношение удельных теплоемкостей газа; M_a — число Маха сопла для чисто газового потока.

4. КОЛЬЦЕВЫЕ И ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ НЕИЗОБАРИЧЕСКИЕ СТРУИ

4.1. КОЛЬЦЕВЫЕ СТРУИ

4.1.1. Истечение струи из кольцевого сопла с центральным телом

В предыдущих разделах были рассмотрены неизобарические струи, истекающие из круглых сопл. Практический интерес представляет также изучение течений в струях, истекающих из сопл другой конфигурации, например из кольцевых сопл, из сопл с некруглым поперечным сечением, из многосопловых компоновок.

Одна из возможных схем кольцевого сопла с центральным телом изображена на рис. 4.1. На кромке A обечайки сопла скорость газа равна звуковой, а давление p_a больше давления p_∞ в окружающей среде. Поэтому непосредственно от звуковой линии AB начинается центрированная волна разрежения ABO, причем в точке A газ расширяется до давления p_∞. Расчетный режим истечения из кольцевого сопла рассматриваемой конфигурации характеризуется тем, что на последней характеристике AO волны разрежения поток параллелен оси, а число Маха постоянно и равно расчетному числу M°. Исходя из этих условий определяется угол наклона обечайки в точке A и контур BO сверхзвуковой части центрального тела.

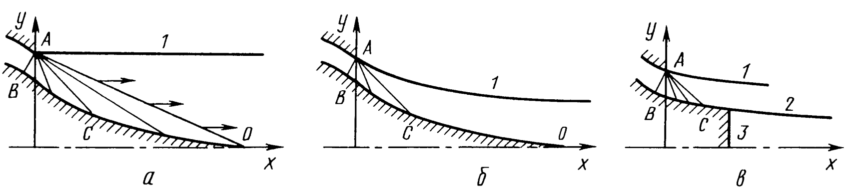


Рис. 4.1. Схема истечения струи из кольцевого сопла с полным *(а, б)* и обрезанным *(в)* центральным телом в затопленное пространство:

а — расчетный режим ($p_\infty = p^\circ$), *б* — нерасчетный режим ($p_\infty > p^\circ$), *1* — внешняя граница струи, *2* — внутренняя граница струи, *3* — донная область

Естественно, что на расчетном режиме граница струи в приближении идеального газа прямолинейна и параллельна оси сопла.

Возможны два нерасчетных режима истечения из рассматриваемого кольцевого сопла: при $p^\circ > p_\infty$ и при $p^\circ < p_\infty$, где p° — расчетное давление, определяемое расчетным числом M°.

В первом случае структура образующейся струи полностью идентична структуре недорасширенной струи, вытекающей из круглого сопла с равномерным потоком на выходе, у которого $M_a = M^\circ$, а степень нерасчетности $n = p^\circ/p_\infty$.

Во втором случае структура кольцевой струи существенно отличается от структуры круглой струи. Схема течения показана на рис. 4.1, *б*. В точке A последней характеристики центрированной волны разрежения давление равно $p_\infty > p^\circ$. Естественно, что вверх по потоку от этой характеристики AC параметры течения такие же, как и на расчетном режиме при $p_\infty = p^\circ$. Заметим, что в случае $p_\infty/p^\circ < 1$ кольцевую струю формально можно называть перерасширенной, если степень нерасчетности определить через отношение давлений p°/p_∞, или недорасширенной, если степень нерасчетности определить через отношение давлений p_a/p_∞.

Для анализа картины течения в кольцевой струе при $p^\circ/p_\infty < 1$ воспользуемся результатами работы [24], в которой течение в кольцевой струе идеального газа было рассчитано методом характеристик для следующих условий: $\gamma = 1{,}4$, $M^\circ = 3{,}71$, $p^\circ/p_\infty = 0{,}05 \ldots 1$.

На рис. 4.2, *а* приведены распределения вдоль поверхности центрального тела статического давления, отнесенного к давлению торможения p_0, на расчетном (кривая *1*) и нерасчетном при $p^\circ/p_\infty = 0{,}112$ (кривая *2*) режимах истечения. Координаты на этом и последующих рисунках отнесены к радиусу r_a обечайки сопла в точке A.

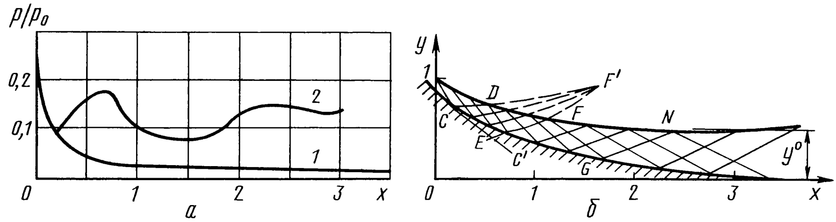


Рис. 4.2. Распределение давления на поверхности тела (*а*) и геометрия кольцевой струи на нерасчетном режиме (*б*)

Распределение давления на нерасчетном режиме имеет ярко выраженный колебательный характер, что является следствием ячеистой структуры течения между границей струи и поверхностью центрального тела. Это следует из рассмотрения рис. 4.2, *б*, на котором изображены граница струи и характеристики 1-го и 2-го семейств. Характеристики AC, CD, DE, EF, FG, GN разделяют различные аналитические области течения, при этом на самих этих характеристиках терпят разрывы производные газодинамических параметров и кривизна линий тока.

В точках D, F, N кривизна границы струи терпит разрыв, что и определяет волнообразную структуру границы; разрывы производных в распределении давления на теле возникают соответственно на точках C, E и G (рис. 4.2). Важным для понимания структуры течения является тот факт, что в треугольнике CDE имеет место течение сжатия.

Для объяснения данного факта примем, что течение в этой области является плоским (это выполняется с достаточной точностью). Тогда характеристики AC, CD и граница струи AD являются прямолинейными, и если бы начиная от точки C, контур тела CC' был прямолинейным, то в области CDE имело бы место поступательное течение с постоянными параметрами. Однако в силу кривизны стенки CE в этой области возникает течение сжатия при обтекании поступательным сверхзвуковым потоком вогнутой стенки. Известно, что такое течение сжатия замыкается висячим скачком, начинающимся в точке F' пересечения характеристик. На рис. 4.2 пунктиром изображены характеристики условного течения сжатия, которое возникло бы в случае, когда во всей области вниз по потоку от характеристики AC до характеристики CD имело место поступательное течение с $p=p_a$. Точка F', вообще говоря, может находиться как внутри, так и вне струи. Однако проведенные расчеты показывают, что точка F' располагается всегда вне струи. Волны сжатия, возникающие в треугольнике CDE, отражаются от границы струи в виде волн разрежения, попадая на границу тела, отражаются также волнами разрежения, а от границы струи — в виде волн сжатия и т. д. Дальнейшая структура течения определяется чередующейся системой волн разрежения и сжатия, отражающихся от стенки и границы струи, при этом при отражении от жесткой стенки интенсивность волн сохраняется по величине и знаку, а при отражении от границы струи сохраняется по величине, но меняется по знаку.

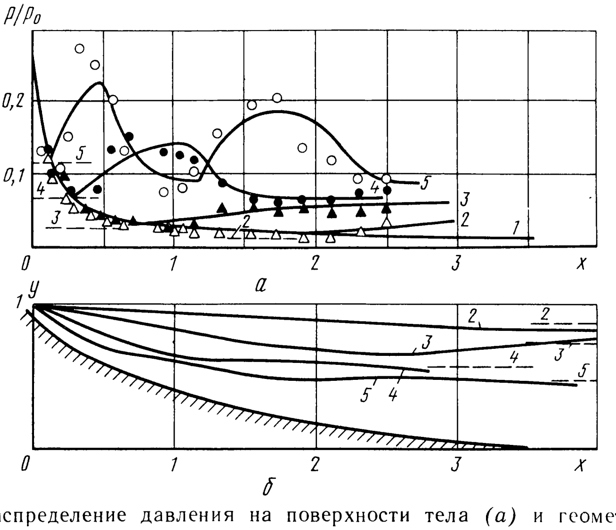


Рис 4 3. Распределение давления на поверхности тела (a) и геометрия кольцевой струи (б) при различных p°/p_∞:

экспериментальные данные ○ — 5; ● — 4, ▲ — 3, △ — 2

На рис. 4.3 приведены распределения давления на поверхности центрального тела и форма границы струи при различных значениях p°/p_∞. На этом рисунке цифрой *1* обозначены данные, соответствующие $p^\circ/p_\infty=1$; *2* — $p^\circ/p_\infty=0{,}67$; *3* — $p^\circ/p_\infty=0{,}379$; *4* — $p^\circ/p_\infty=0{,}148$ и *5* — $p^\circ/p_\infty=0{,}087$. Сплошные кривые — расчет, значки — эксперимент.

Отметим две интересные особенности течения на нерасчетном режиме. Отклонение распределения давления на контуре тела при нерасчетном течении от распределения давления, соответствующего расчетному течению, согласно результатам расчетов происходит при давлении, равном p_∞. На рис. 4.3, *а* значения p_∞, отнесенные к давлению торможения p_0, показаны пунктиром.

Кроме того, согласно результатам расчетов в кольцевой области между границей струи и контуром тела ударных волн не возникает и течение является изоэнтропийным. В связи с этим на достаточном удалении от тела параметры течения практически выравниваются, давление в сечении становится равным p_∞, а вектор скорости — параллельным оси. При заданных p°/p_∞ и M°, воспользовавшись уравнением неразрывности, можно определить радиус y° изобарического сечения струи (см. рис. 4.2, *б*), в котором давление равно p_∞, а вектор скорости параллелен оси. Значения y° представлены пунктиром на рис. 4.3, *б*.

Как видно из этого рисунка, уже в окрестности концевого участка центрального тела радиус струи незначительно отличается от y°, т. е. выравнивание течения происходит достаточно быстро. Из рассмотрения рис. 4.3, *а* следует, что на отрезке BC (см. рис. 4.2) контура (длина этого отрезка возрастает с увеличением p°/p_∞) расчетные и экспериментальные значения хорошо количественно согласуются между собой. В остальной области течения экспериментальные и расчетные значения качественно согласуются между собой, показывая немонотонный характер зависимости при малых p°/p_∞. Однако в областях максимумов и минимумов давления имеются некоторые количественные расхождения в величине давления. При этом в эксперименте, как правило, в окрестности минимума давление ниже, а в области

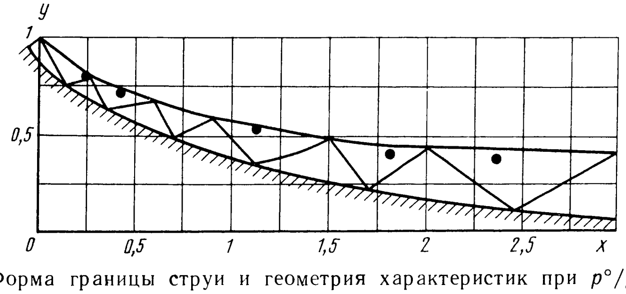


Рис. 4.4. Форма границы струи и геометрия характеристик при $p^\circ/p_\infty=0{,}0511$

максимума — выше, чем в расчете. Отмеченное расхождение в области экстремумов может быть связано с вязкими эффектами — некоторой эжекцией внешней среды струей, что может снизить эффективное значение p_∞, а также с отличием формы звуковой линии AB в расчете и эксперименте.

На рис. 4.4 для $p^\circ/p_\infty=0{,}0511$ представлена граница струи и геометрия характеристик 1-го и 2-го семейств, полученных в расчете. Там же черными точками показана определенная из эксперимента граница струи. И в этом случае видно хорошее соответствие между расчетными и экспериментальными данными как по числу бочек, так и по форме границы струи и положению характеристик.

На рис. 4.5, 4.6 сравниваются экспериментальные (помеченные кружочками) и расчетные значения относительного давления p/p_0 в фиксированных точках ($x=0{,}93$ и $x=2{,}51$ соответственно) в зависимости от p°/p_∞. Видно хорошее соответствие расчетных и экспериментальных данных. Как расчетные, так и экспериментальные данные указывают на немонотонную зависимость p/p_0 от p°/p_∞ в фиксированной точке контура центрального тела. Это связано с чередованием волн сжатия и разрежения. Существенно при этом, что в диапазоне изменения p°/p_∞ от 0,05 до 0,2 (см. рис. 4.6) небольшое изменение p°/p_∞ приводит к весьма заметному изменению давления в точке. Такое резкое изменение связано с тем, что для точек, расположенных в окрестности граничных характеристик AC, EF, FG (см. рис. 4.2), небольшие изменения p°/p_∞ приводят к тому, что точка из области разрежения (сжатия) попадает в область сжатия (разрежения), а поскольку при малых p_0/p_∞ протяженность таких областей значительно меньше, чем при больших, то происходит многократное появление максимумов и минимумов в зависимости p/p_0 от p°/p_∞.

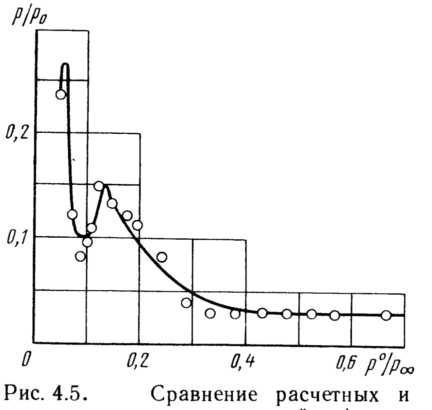


Рис. 4.5. Сравнение расчетных и экспериментальных значений p/p_0 на поверхности тела ($x=0{,}93$):
○— эксперимент

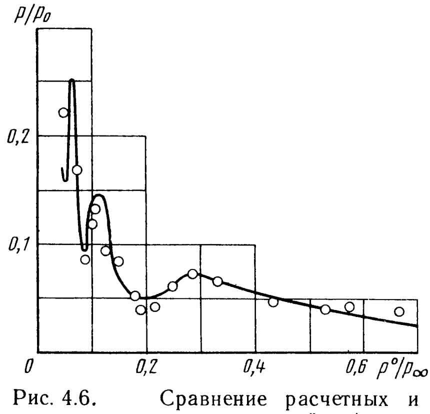


Рис. 4.6. Сравнение расчетных и экспериментальных значений p/p_0 на поверхности тела ($x=2{,}51$):
○ — эксперимент

Начиная с некоторого значения ($p°/p_\infty=0{,}4$ на рис. 4.5 и 0,25 на рис. 4.6) давление в точке или вовсе перестает зависеть от p/p_∞ (см. рис. 4.5), так как рассматриваемая точка находится уже на отрезке BC, на котором давление не зависит от внешнего давления, или монотонно уменьшается (см. рис. 4.6), поскольку точка при увеличении $p°/p_\infty$ остается в области сжатия CDE, а с уменьшением p_∞ давление в этой области падает до наступления автомодельного режима.

Отметим, что наличие острых максимумов и минимумов делает систему кольцевая струя — внешний поток неустойчивой к малым возмущениям как внешнего потока, так и потока внутри сопла, что может приводить к пульсациям давления на стенке сопла. Этот факт следует учитывать для реальных конструкций.

С целью уменьшения весовых и габаритных характеристик центральное тело кольцевого сопла обычно укорачивается. В этом случае за торцем центрального тела образуется вязкое отрывное течение, так называемая *донная область* (см. рис. 4.1,*в*), оказывающая влияние на формирование струи. Давление на торце центрального тела, которое обычно называют донным давлением, определяет положение внутренней границы струи. Для течения в донной области характерны открытый и закрытый режимы. В открытом режиме донная область сообщается с окружающей средой и давление в ней зависит от внешнего давления p_∞. В закрытом режиме в донной области образуется звуковая линия и внешние возмущения не могут воздействовать на отрывное течение. Поэтому донное давление не зависит от p_∞ и изменяется пропорционально давлению торможения потока, истекающего из сопла. Существует так называемый *критический режим*, когда происходит резкий переход от открытой к закрытой донной области.

В работе [68] проведено экспериментальное исследование кольцевых струй, истекающих из сопла с полностью обрезанным центральным телом. Схема сопла показана на рис. 4.7. Кольцевое сопло такой конфигурации можно рассматривать как предельный случай кольцевой связки круглых сопл, расположенных по периферии днища ЛА. Исследовалось истечение струи в затопленное пространство и в спутный поток с $M_\infty=0{,}5\ldots3$ при разных значениях степени нерасчетности и числах Маха сопла в диапазонах $n=0{,}3\ldots3$ и $M_a=1{,}35\ldots3{,}6$.

Основное отличие сверхзвуковой кольцевой струи от круглой струи связано с различием давлений на внешней и внутренней границах кольцевой струи. Возможны режимы, когда струя по отношению к внешнему давлению является перерасширенной, а по отношению к внутреннему давлению (донному давлению) — недорасширенной. Это приводит к тому, что образующаяся система волн сжатия и разрежения различна во внешней и внутренней частях струи.

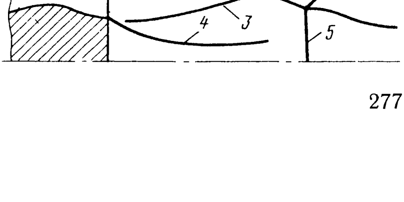


Рис. 4.7 Схема кольцевого сопла и структура течения в недорасширенной кольцевой струе:

1 — внешняя граница струи, *2* — внешний висячий скачок; *3* — внутренний висячий скачок, *4* — внутренняя граница; *5* — диск Маха

Эксперименты показали, что перестройка течения от открытой донной области к закрытой происходит всегда на режиме недорасширения относительно внутреннего давления, а относительно внешнего давления — на режиме перерасширения или недорасширения в зависимости от конкретных условий истечения. Например, в затопленной струе с $M_a=2$ критический режим наступает при степени нерасчетности $n=p_a/p_\infty \approx 1{,}8$, а в струе с $M_a=3{,}6$ — при $n \approx 0{,}85$. При этом на критическом и закритическом режимах степень нерасчетности по внутреннему давлению $p_a/p_д$ слабо зависит от конкретных условий истечения и равна примерно 5,5.

Характерной особенностью структуры рассматриваемой кольцевой струи, отличающей ее от круговой, является образование внутреннего висячего скачка, обусловленное обтеканием струей донной области. Этот скачок аналогичен скачку взаимодействия, образующемуся в недорасширенной струе, истекающей из многосопловой компоновки (см. разд. 4.2).

Отметим некоторые особенности кольцевой струи по экспериментальным данным [68].

У струи с $M_a=2$ в критическом режиме внешние висячие скачки образуют маховскую конфигурацию волн. Этот случай напоминает структуру одиночной цилиндрической струи при больших нерасчетностях, когда от бочкообразной структуры остается только первая ячейка (бочка), заканчивающаяся центральным скачком, за которым струя сильно турбулизируется и течение продолжается с дозвуковой скоростью. По мере роста нерасчетности диск Маха отходит от сопла, при $n=2{,}5$ внешний и внутренние висячие скачки сначала пересекаются регулярно, а затем возникает маховское взаимодействие преломленных внешних скачков.

Для струи с $M_a=3{,}1$ в критическом режиме внешний и внутренний висячие скачки сначала пересекаются регулярно на расстоянии 1,3 D_a от сопла, а затем (примерно через 0,1 D_a) реализуется маховское взаимодействие преломленных внешних скачков. С увеличением давления размеры ячеек растут, а число ячеек уменьшается. Например, если при $n<0{,}5$ струя с $M_a=3{,}6$ состоит из трех ячеек, то при $n=0{,}8$ — из двух. Между нерасчетностями 0,8 и 0,9 струя мгновенно перестраивается таким образом, что видна только первая, значительно увеличенная ячейка, которая удлиняется и расширяется внутрь. В критическом режиме струи с $M_a=3{,}6$ внутренний и внешний висячие скачки сначала регулярно взаимодействуют, а затем внешние преломленные скачки доходят до оси струи без образования диска Маха. По мере возрастания числа Маха струи угол наклона внутреннего висячего скачка к оси симметрии уменьшается и для $M_a=3{,}6$ внутренний скачок почти параллелен оси.

На примере истечения кольцевой струи с $M_a=3{,}6$ рассмотрим влияние спутного потока. Для числа Маха спутного потока $M_\infty=0{,}5\ ..\ 0{,}8$, критический режим наступает при большей степени нерасчетности, чем при истечении в затопленное пространство, для $M_\infty=0{,}9$ — при меньшей ($n=0{,}6$). Структура сверхзвуковой струи, истекающей из сопла в дозвуковой спутный поток, в основном, аналогична структуре струи, истекающей в затопленное пространство.

Если при фиксированной степени нерасчетности, близкой к степени нерасчетности, соответствующей критическому режиму ($n=0{,}8$), увеличивать число Маха спутного потока, то можно отметить следующее. Увеличение M_∞ от 0,5 до 0,8 не вызывает существенных изменений в структуре струи: длина первой ячейки (бочки), диаметры «горла» донного следа в районе первой и второй ячеек остаются практически постоянными. При изменении M_∞ от 0,8 до 0,9 происходит перестройка течения: донная область закрывается; по отношению к внешнему потоку струя перерасширена, к внутреннему — недорасширена. Скачок уплотнения, отходящий от наружной кромки сопла, проходит по сильно расширенной внутрь первой ячейке струи, регулярно пересекается сначала с внутренним висячим скачком, а потом с внешним от противоположной кромки и доходит до границы струи.

Рост скорости от $M_\infty=1{,}1$ до $M_\infty=1{,}2$ связан с повторной перестройкой структуры струи — донная область открывается. Это сопровождается появлением второй ячейки и уменьшением размеров первой (в основном в результате увеличения диаметра горла). Полученное течение напоминает структуру кольцевой струи при $M_\infty=0{,}5$ с тем отличием, что первая ячейка немного укорачивается, а сечение кольцевой струи сжимается. Закрытие донной области в околозвуковом диапазоне скоростей для нерасчетностей, близких к критическим, можно объяснить следующим образом. При околозвуковой скорости внешнего потока вблизи кромки сопла возникает местная сверхзвуковая зона, ограниченная в районе горла струи скачком уплотнения. В этой зоне давление ниже давления в набегающем потоке, поэтому реализуемая степень нерасчетности становится больше заданной и достигает критической величины. Это приводит к закрытию донной области при значениях n, меньших, чем при истечении в затопленное пространство. Повышение скорости внешнего потока сопровождается переходом к полностью сверхзвуковой картине обтекания со сверхзвуковой скоростью за замыкающим скачком. Перед первой ячейкой струи возникает скачок уплотнения, и давление на поверхности раздела растет; следовательно, для заданной нерасчетности реализуемое значение n будет меньше критического, и донная область открывается.

4.1.2. Истечение струи из кольцевого сопла под большим углом к спутному потоку

Рассмотрим течение газа в струе, истекающей из кольцевой осесимметричной щели под большим углом к спутному потоку. Такие струи часто называют *поперечными струями*. Схематическая картина течения в поперечной струе показана на рис. 4.8. Ниже для анализа используются результаты численного расчета кольцевых поперечных струй идеального газа, представленные в [25]. В этой работе предполагалось, что контур тела справа от щели представляет собой бесконечно длинный цилиндр, а давление в донной области *Д* настолько мало, что отрыв потока от поверхности цилиндра на рассматриваемом участке струи не происходит. При больших степенях нерасчетности, при которых невозможно образование в спутном потоке присоединенной ударной волны, в качестве модели взаимодействия струи и спутного потока применялась модель «жидкого конуса» (см. подразд. 3.1.1).

В [25] представлены результаты не только для поперечных кольцевых струй, но и для круглых струй, истекающих из конических сопл при таких же больших значениях θ_a. Расчеты были проведены при фиксированных значениях $M_\infty=25$, $\gamma_a=\gamma_\infty=1{,}4$, а остальные определяющие параметры варьировались в следующих диапазонах $\theta_a=15°$ ... $50°$, $M_a=2$ ... 4, $n=463$ ... $463\,000$.

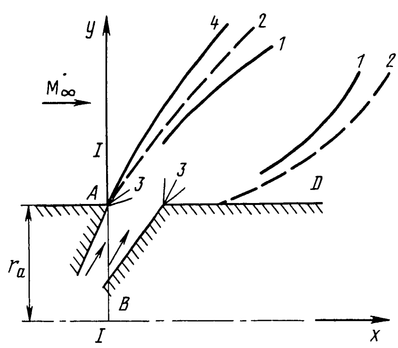


Рис. 4.8. Схема взаимодействия поперечной струи со спутным потоком:
1 — висячие скачки, *2* — границы струи, *3* — волны разрежения, *4* — присоединенная ударная волна

При расчете истечения струи из кольцевой щели начальные данные задавались в сечении *1—1* (см. рис. 4.8) такими же, как для соответствующего участка круглого конического сопла с тем же θ_a, причем высота щели в этом сечении $h=0{,}1r_a$ где r_a — радиус выходного сечения круглого сопла. При этих условиях расход газа через щель $g_a \approx 0{,}19G_a$, где G_a — расход газа через круглое сопло. В дальнейшем все линейные размеры будут отнесены к r_a или, что одно и то же — к радиусу цилиндра.

В разд. 2 и 3 представлен большой фактический материал по исследованию струй при небольших значениях угла θ_a и установлены основные закономерности влияния M_a, M_∞, n, γ_a и других параметров на структуру течения. В связи с этим представляет несомненный интерес анализ возможности непосредственного использования в том или ином виде уже имеющихся данных для получения характеристик круглых и поперечных струй в более широком диапазоне углов θ_a.

Рассмотрим вначале геометрические характеристики струй. Как известно, при малых значениях θ_a геометрические характеристики струй меняются линейно по числу M_a. Как показывают расчеты, это свойство сохраняется и при больших углах θ_a. Также сохраняется свойство автомодельности струй в переменных $x/n^{0,5}$, $y/n^{0,5}$ по степени нерасчетности.

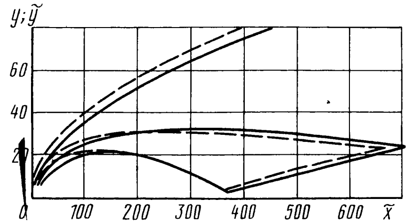
Если при малых значениях угла θ_a геометрия струи остается практически неизменной, то с его ростом, как показали расчеты, зависимостью от этого параметра, по крайней мере, продольных размеров струи пренебрегать нельзя. Результаты расчетов струй при трех значениях угла $\theta_a=15°$, $30°$ и $50°$ (первые два варианта рассчитывались по обычной схеме с присоединенной ударной волной) показывают, что отличие характерных продольных размеров струй (расстояний до точки отражения висячего скачка, длины струи и др.) для указанных вариантов в обычных переменных x, y достигает 40 . . . 50%. В связи с этим была предпринята попытка подобрать вместо x некоторую функцию $\tilde{x}$, учитывающую геометрические характеристики сопла. В частности, была рассмотрена функция

$$\tilde{x}=x(1+\sin^2\theta_a).$$

Для исследованного диапазона изменения определяющих параметров использование координаты $\tilde{x}$ вместо x дало удовлетворительные результаты, хотя сохраняется тенденция к увеличению поперечных размеров с ростом θ_a. Таким образом, при истечении недорасширенных струй из круглых конических сопл с большими углами раствора зависимость геометрической картины течения от числа M_a и степени нерасчетности имеет такой характер, как и для обычных сопл, а зависимость от угла θ_a становится существенной.

Как показывают результаты расчетов истечения струй из круглого сопла и кольцевой щели, при $M_a=4$, $n=13\,900$, $\theta_a=30°$ в переменных x, y формы границ струй и скачков уплотнения при общем качественном подобии картин течения заметно отли-

Рис. 4.9. Сравнение струй, истекающих из круглого сопла и кольцевой щели для $M_a=4$, $\theta_a=30°$, $n=13\,900$: - - - — поперечная струя, ——— круглая струя



чаются абсолютным размером струй из-за разницы расходов через круглое сопло и кольцевую щель.

Воспользуемся моделью эквивалентного сопла (см. подразд. 3.1.5). Под эквивалентным соплом подразумевается круглое коническое сопло с таким же углом θ_a и расходом, как и у кольцевой щели. В качестве множителя при построении границы струи и скачков уплотнения для кольцевой щели необходимо ввести отношение линейных размеров кольцевой щели и эквивалентного сопла. Для рассматриваемых здесь случаев это отношение примерно равно

$$b=\sqrt{G_a/g_a}\,.$$

На рис. 4.9 построение результатов расчетов для круглых сопл выполнено в переменных y, $\tilde{x}=x(1+\sin^2\theta_a)$, а для кольцевой щели в переменных

$$\tilde{x}=xb(1+2\sin^2\theta_a);\ \tilde{y}=yb(1+0{,}5\sin^2\theta_a).$$

Видно, что в этих переменных геометрические размеры поперечных и круглых струй удовлетворительно согласуются друг с другом. Это имеет место и при других значениях определяющих параметров. Вместе с тем можно отметить, что влияние параметра θ_a для поперечной струи оказывается более существенным, поскольку в отличие от круглой струи в начальном сечении *1—1* кольцевой струи (см. рис. 4.8) угол наклона к оси симметрии векторов скорости всех частиц газа примерно равен θ_a.

Установленное приближенное подобие струй позволяет по результатам расчетов истечения газа из круглого сопла определить форму границы струи и ударных волн для соответствующей кольцевой струи.

Анализ результатов [25] позволяет сделать вывод о качественном и приближенном количественном совпадении полей газодинамических параметров в сходственных сечениях ($\tilde{x}$=const) струй, истекающих из круглого сопла и кольцевой щели при одинаковых значениях определяющих параметров. Это совпадение имеет место на большей части начального участка, составляющей более 80% его длины. В качестве иллюстрации на рис. 4.10 . . . 4.13 проведено сравнение полей газодинамических параметров в различных областях течения. Поперечные поля

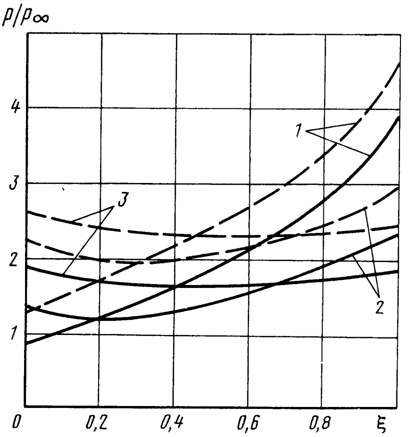


Рис. 4.10. Распределения давления в области между висячим скачком и границей струи при $M_a=4$, $\theta_a=30°$, $n=13\,900$:

сплошные кривые — круглая струя 1 — $\tilde{x}=266$, 2 — $\tilde{x}=392$, 3 — $\tilde{x}=516$, пунктирные кривые — кольцевая струя 1 — $\tilde{x}=262$, 2 — $\tilde{x}=394$, 3 — $\tilde{x}=499$

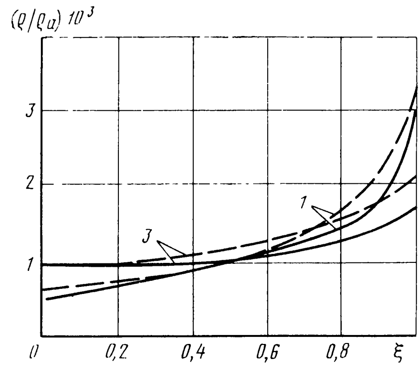


Рис. 4.11. Распределения плотности в области между висячим скачком и границей струи (условия и обозначения, как на рис. 4.10)

давления, плотности и скорости в области между висячим скачком и границей струи показаны на рис. 4.10 . . . 4.12, а поля давления в зоне возмущенного спутного потока — на рис. 4.13. На этих рисунках поля параметров построены по нормированной координате $\xi=(y-y_{\min})/(y_{\max}-y_{\min})$, где $y_{\max}$, $y_{\min}$ — максимальная и минимальная ординаты соответствующей области.

Отметим, что при истечении недорасширенной струи из круглого конического сопла или кольцевой щели при больших зна-

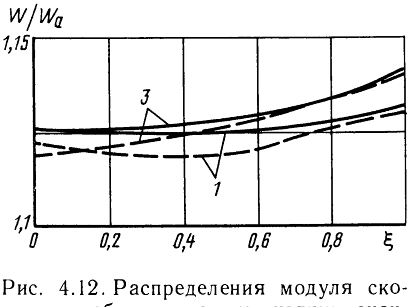


Рис. 4.12. Распределения модуля скорости в области между висячим скачком и границей струи (условия и обозначения, как на рис. 4.10)

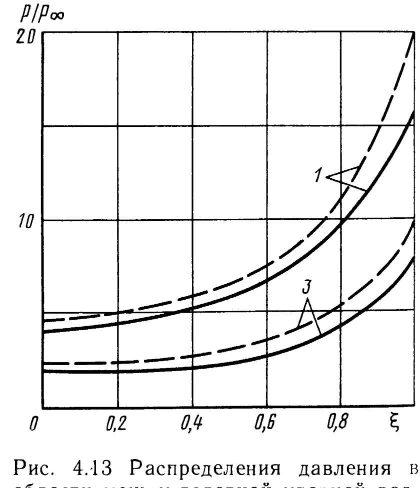


Рис. 4.13 Распределения давления в области между головной ударной волной в спутном потоке и границей струи (условия и обозначения, как на рис. 4.10)

чениях θ_a полностью сохраняются все характерные особенности течения, установленные для струй при небольших θ_a. Вместе с тем наблюдаются и некоторые специфические особенности, отличающие течения в струях при больших θ_a. Например, давление вдоль границы струи монотонно уменьшается, оставаясь вплоть до сечения, где отраженный скачок выходит на границу струи, выше величины давления в невозмущенном спутном потоке.

Можно заметить, что в случае кольцевой струи практически во всей возмущенной области уровни давления и плотности оказываются выше, а величина модуля скорости меньше по сравнению со случаем истечения струи из круглого сопла.

4.2. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ СТРУИ

4.2.1. Струи, истекающие из сопл неосесимметричной формы

В практике по различным конструктивным соображениям достаточно часто используются сопла, имеющие неосесимметричную форму. Выходные сечения таких сопл могут иметь весьма различную форму, например эллипса, треугольника, квадрата, прямоугольника, многоугольника и т. д. Истечение неизобарических струй из таких сопл имеет трехмерную структуру. Таким образом, в дополнение к безразмерным критериям, определяющим течение в осесимметричной струе, в данном случае для описания течения должны быть привлечены новые критерии, отражающие геометрическую форму сопла.

Ясно, что истечение струи из сопла, имеющего выходное сечение в форме правильного многоугольника, будет близко к осесимметричному случаю, если число сторон многоугольника достаточно велико. С уменьшением этого числа сторон отличия от осесимметричного истечения будут увеличиваться, однако, как показывают исследования, эти отличия оказываются не очень большими, если многоугольник является правильным. Существенные отличия возникают, когда у выходного среза сопла значительно разнятся размеры в двух взаимно перпендикулярных характерных направлениях — «ширина» и «длина». Вдоль этих характерных направлений в дальнейшем будем располагать координатные оси y и z. Ось x будем располагать в направлении истечения.

Предельным случаем, наиболее сильно отличающимся от осесимметричного, является истечение струи из плоского сопла с бесконечным отношением его длины l к ширине $d=2a$. Для анализа течения в различных конкретных примерах пространственного истечения можно рассматривать последние как промежуточные между осесимметричным и плоским течениями. Для этого сначала кратко рассмотрим некоторые особенности истечения недорасширенной струи из плоского сопла в затопленное пространство и сравним их с особенностями для осесимметричного истечения.

Для анализа течения в начальном участке плоской недорасширенной струи можно воспользоваться методом нестационарной аналогии подобно тому, как это было сделано в подразд. 2.1.4 для осесимметричных струй. Пусть степень нерасчетности n очень велика ($n \gg 10$), а плоское сопло с полушириной a имеет на выходе гиперзвуковое число Маха ($M_a > 3$) и угол направления потока на выходной кромке $\theta_a = 0$.

Как и ранее, полагаем, что после выхода из сопла плоский слой газа толщиной $dx = Udt$ равномерно движется вдоль оси со скоростью $U = [2(H_a - e_a)]^{1/2}$ и одновременно расширяется в поперечном направлении y, расходуя запас внутренней энергии $e_a = c_v T_a$, соответствующей температуре T_a на выходе сопла. При очень большой степени нерасчетности можно считать, что в максимальном сечении $x = X$ энергия $e_a G_a dt/l$ порции плоского слоя газа толщиной dx и единичной длины в направлении z, равной $G_a dt/l = \varrho_a W_a 2a \cdot 1 \cdot dtt$, полностью расходуется на работу против сил давления p_∞ газа затопленного пространства — $p_\infty 2Y \times$ $\times 1 \cdot dx$. Баланс этих величин дает для максимальной полуширины Y плоской струи следующие выражения

$$Y_{\text{пл}} = \frac{G_a U}{2 p_\infty l} \vartheta^2 = \frac{n}{\gamma_a - 1} \frac{w_a}{U} a\,; \tag{4.1}$$

$$U = W_a \left(1 + \frac{2}{\gamma_a M_a^2}\right)^{1/2}; \quad \vartheta^2 = \frac{e_a}{U^2} = \frac{1}{(\gamma_a - 1)(\gamma_a M_a^2 + 2)}\,.$$

Аналогично подразд. 2.1.4 из баланса количества движения в направлении y для произвольного сечения начального участка

$$p_\infty = \varrho V^2,$$

где $V = \frac{y_2}{t} - \frac{dy_2}{dt} = U\left(\frac{y_2}{x} - \frac{dy_2}{dx}\right)$

— поперечная скорость газа струи в системе координат, движущейся вместе с границей y_2, можно получить уравнение границы $y_2 = (x)$ на начальном участке и расстояние X до его максимального сечения, если приближенно положить $\varrho = G_a/(2Y \cdot 1 \cdot U)$. Получаем

$$\eta_2 = \xi (2 - \sqrt{\xi})^2, \tag{4.2}$$

где $\xi = x/X_{\text{пл}}$; $\eta = y/Y_{\text{пл}}$;

$$X_{\text{пл}} = \frac{GU}{2p_\infty} \vartheta = \sqrt{\frac{\gamma_a}{\gamma_a - 1}} \cdot n M_a \cdot a\,. \tag{4.3}$$

Сравним величины $X_{пл}$ и $Y_{пл}$ в плоской струе, даваемые выражениями (4.1) и (4.3) с соответствующими величинами X_0 и Y_0 для осесимметричной струи (см. соотношения (2.66) и (2.67)). Для одинаковых значений параметров M_a, γ_a, n имеем

$$\frac{X_{пл}/a}{X_0/r_a}=\frac{Y_{пл}/a}{Y_0/r_a}=\left(\frac{n}{\gamma_a-1}\cdot\frac{W_a}{U}\right)^{1/2}=\frac{Y_0}{r_a},$$

а при одинаковых значениях G_a, U и p_∞

$$\frac{X_{пл}}{X_0}=\frac{Y_{пл}}{Y_0}=\frac{\pi}{2}Y_0.$$

Таким образом, характерные размеры X и Y плоской струи при $n>1$ больше аналогичных величин в осесимметричной струе. При этом с увеличением степени нерасчетности отличия увеличиваются.

Значение тангенса угла наклона границы плоской струи (4.2) вблизи кромки сопла превышает соответствующую величину в осесимметричной струе примерно в полтора раза, т. е. плоская струя расширяется сильнее.

Можно также отметить, что в плоской струе более интенсивно протекают процессы вязкого перемешивания. Численные расчеты структуры слабо неизобарических и изобарических струй, выполненные [7 ... 9] с использованием уравнений Навье—Стокса в параболическом приближении, показывают, что темп нарастания толщины вязкой области плоской струи более сильный, чем осесимметричной. К такому же результату приводит анализ плоского изобарического слоя смешения, проведенный по методу, изложенному в подразд. 2.2.6.

Отмеченные особенности плоской струи качественно не меняются и для случая истечения в спутный поток.

Рассмотрим некоторые результаты численных расчетов структуры струй, истекающих из сопл с некруглым сечением. Из-за достаточно большой трудоемкости таких расчетов широкого варьирования определяющих критериев ни в одной из выполненных работ не приводилось, что не позволяет построить обобщающие количественные зависимости. Поэтому приводимые далее данные расчетов могут служить лишь иллюстрациями для качественного представления об основных особенностях течения.

Остановимся на результатах, полученных на основе модели невязкого газа. В работе [20] расчетные исследования проведены при помощи пространственного аналога метода сквозного расчета, а в работе [72] — при помощи пространственного сеточно-характеристического метода.

На рис. 4.14 ... 4.18 приведены результаты расчета [20, 67] недорасширенных сверхзвуковых струй, истекающих из сопл с эллиптическим и «почти прямоугольным» сечениями в покоящую-

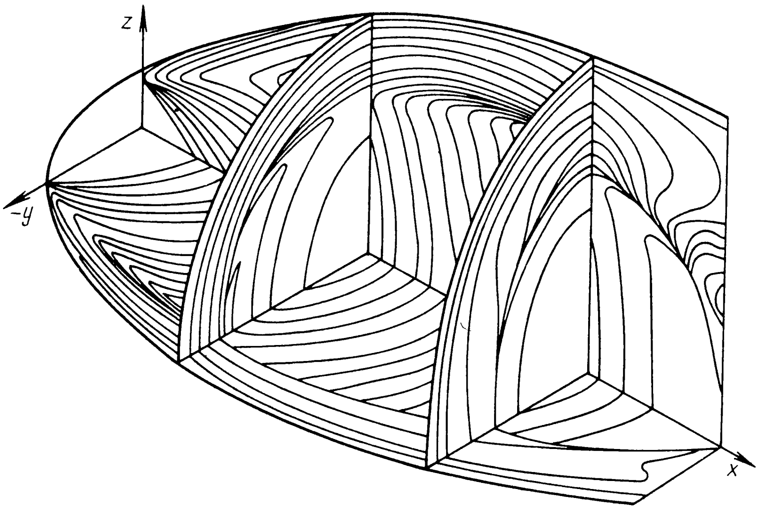


Рис. 4.14. Поле течения пространственной струи, истекающей из эллиптического сопла

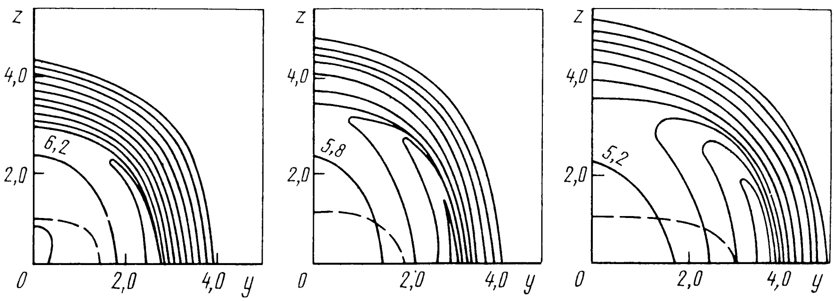


Рис. 4.15. Линии M=const в пространственных струях, истекающих из эллиптических сопл с различным отношением полуосей

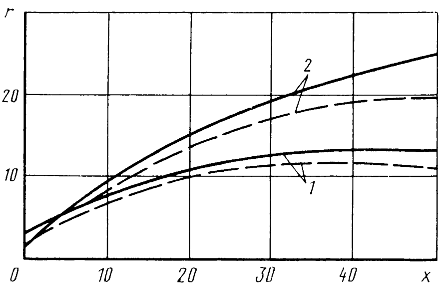


Рис. 4.16. Форма границы струи и висячего скачка в пространственной струе

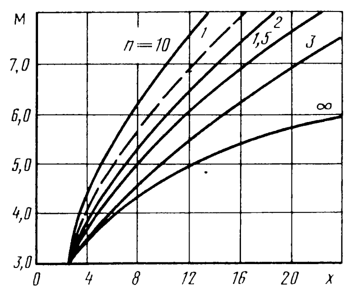


Рис. 4.17. Распределение чисел M вдоль оси пространственных сопл

ся среду. Поток на выходе из сопла принимался равномерным и параллельным оси x, а его число $M_a=3{,}0$.

Первые три рисунка относятся к струям, вытекающим из сопл при ступени нерасчетности $n=10$. На рис. 4.14 для эллиптического сопла с отношением полуосей $a/b=2$ изображены сечение среза сопла, а также линии пересечения границы струи и поверхностей постоянства числа Маха с плоскостями $y=0$, $z=0$, $x/b=20$. Масштаб по оси x взят вдвое меньше, чем по осям y и z. Линии $M=\mathrm{const}$ нанесены через равные интервалы ($\Delta M=0{,}2$), причем крайние левые отвечают $M=M_a=3{,}0$. Сгущение поверхностей $M=\mathrm{const}$ дает висячий скачок.

Как видно из рис. 4.14, рассчитанное течение имеет достаточно сложную пространственную структуру. В частности, образование висячего скачка в плоскости, проходящей через малую ось эллипса, происходит при больших x, чем в плоскости его большой полуоси. Другая интересная особенность состоит в том, что более интенсивно газ расширяется в направлении оси z, что качественно соответствует более сильному расширению плоской струи. В результате струя, вытекающая из сопла, сечение которого вытянуто в направлении оси y, начиная с некоторых x, оказывается вытянутой в направлении оси z, т. е. в перпендикулярном направлении. Усиление отмеченного эффекта с ростом эллиптичности выходного сечения сопла (отношение полуосей a/b) хорошо видно из рис. 4.15, на котором в сечении $x/b=10$ показаны линии $M=\mathrm{const}$, граница струи, висячий скачок и проекция кромки сопла (штриховые линии) для трех значений $a/b=1{,}5$; $2{,}0$; $3{,}0$.

Рис. 4.18. Поле течения пространственной струи, истекающей из сопла с почти квадратным сечением

На рис. 4.15 в каждом случае для одной из линий $M=\mathrm{const}$ указано соответствующее значение числа Маха, прочие кривые проведены через $\Delta M=0{,}2$, а y и z отнесены к b. Описанный ранее эффект изменения ориентации большой оси поперечного сечения струи с ростом степени нерасчетности усиливается, как это следует из рис. 4.16, отвечающего $n=100$ и $a/b=2$. Это также соответствует отмеченному увеличению отличий между плоской и осесимметричной струями с ростом n. Сплошные линии на рисунке дают границу струи, а штриховые — висячий скачок в плоскостях симметрии струи. Кривые, отмеченные цифрой *1*, соответствуют плоскости большой оси эллипса, а цифрой *2* — его малой оси, r — расстояние до оси x, линейные размеры отнесены к b.

Влияние формы выходного сечения сопла на распределение числа Маха вдоль оси x хорошо видно из рис. 4.17, отвечающего $n=10$. Сплошные кривые на рисунке относятся к эллиптическим соплам (цифры над кривыми — значения a/b), причем $a/b=1$ соответствует осесимметричной струе, а $a/b=\infty$ — плоской, штрихами дано аналогичное распределение, имеющее место для сопла с почти квадратным сечением среза. Во всех случаях расстояние вдоль оси x отнесено к минимальному размеру поперечного сечения сопла. Представление о геометрии струи и висячего скачка в случае почти квадратного сопла при $n=10$ дает рис. 4.18, построенный по тому же принципу, что и рис. 4.14, с тем отличием, что здесь масштабы по всем осям одинаковые. Струя, вытекающая из такого сопла, наиболее интенсивно расширяется в направлении осей y и z. В результате поперечное сечение струи приобретает форму, близкую к квадрату, повернутому относительно выходного сечения сопла на $\pi/4$.

Рассмотрим результаты численных расчетов, проведенных [7—9] при учете влияния вязкости с использованием параболического приближения уравнений Навье—Стокса. В соответствии с ограничениями этого приближения авторами рассматривалось истечение струй в спутный сверхзвуковой поток. Для интегрирования системы уравнений параболического приближения данной трехмерной задачи использовался метод переменных направлений или дробных шагов, в основу которого положен принцип построения разностной схемы для многомерных уравнений из одномерных схем. Суть его заключается в том, что в сечении $k+1$ вместо полной системы уравнений решается система с двумя независимыми переменными x и y, а в сечении $k+2$ решается система с двумя независимыми переменными x и z.

Авторами представлены результаты расчетов только для ламинарного режима истечения воздуха при $\mathrm{Re}_a=0{,}35\cdot 10^3$ и следующих фиксированных значениях параметров: $n=5$; $M_a=2{,}5$; $M_\infty=2$; $\gamma_a=\gamma_\infty=1{,}4$; $T_\infty/T_a=1$. Рассматривалось истечение из квадратных и прямоугольных сопл равной площади с отношением сторон $d/l=0{,}3$, где d — ширина сопла, l — длина. Поперечные составляющие скорости в выходном сечении сопла полагались равными нулю. Результаты расчетов сравнивались с данными для струи, истекающей из осесимметричного сопла с той же площадью, как квадратное и прямоугольные сопла.

На рис. 4.19 представлено изменение вдоль оси x продольной составляющей скорости для различных сопл. Кривая *1* соответствует истечению из сопла квадратной формы (квадратики), кривая *2* — из сопла прямоугольной формы (прямоугольники), кривая *3* — из осесимметричного сопла (кружки). На кривой *1* область течения до точки первого максимума относится к начальному участку струи, область течения за вторым максимумом может быть условно принята за основной участок. Тогда область между максимумами на кривой *1* будет соответствовать переходному участку. Можно видеть, что для струи, истекающей из квадратного сопла, характерно почти такое же распределение осевой скорости, что и для осесимметричной струи. Небольшие отличия проявляются лишь на переходном участке.

Для прямоугольного сопла ($d/l=0{,}3$) по кривой распределения продольной составляющей скорости вдоль оси x также можно выделить три характерных участка. Область до максимума при $x/r_{eq}\approx 4$ (где r_{eq} — радиус эквивалентного по расходу осесимметричного сопла) соответствует начальному участку. Область при $x/r_{bq}>40$ по характеру уменьшения осевой скорости может быть принята за основной участок, а область $4<x/r_{eq}<40$ — за переходный. Результаты показывают, что условные границы переходного участка для струи, истекающей из прямоугольного сопла, зависят от геометрии выходного сечения последнего. Можно также видеть, что за исключением небольшого участка $10\lesssim x/r_{eq}\lesssim 17$ величины скорости в струе из прямоугольного сопла ниже, чем в струях из квадратного и осесимметричного сопл. Это указывает на более интенсивный характер процессов вязкого перемешивания в случае истечения из прямоугольного

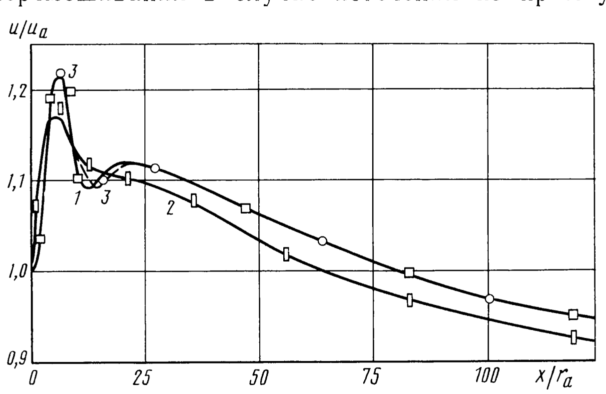


Рис. 4.19. Распределение продольной составляющей скорости

сопла и может быть объяснено отмеченной ранее аналогичной тенденцией при переходе от осесимметричного случая к плоскому. При этом следует отметить, что отличия в величинах скорости для всех рассматриваемых случаев являются не слишком большими. За пределами начального участка они не превышают 5% и заметно уменьшаются с удалением от сопла.

Отклонения от осесимметричности более отчетливо прослеживаются по представленным на рис. 4.20 поперечным профилям скорости в различных сечениях $x=\text{const}$ и в различных взаимно перпендикулярных направлениях — (большая полуось) и z (малая полуось). На данном рисунке цифра *1* соответствует профилям в направлении y, цифра *2* — в направлении z, а цифра *3* — эквивалентной осесимметричной струе. Видно существенное различие профилей в сечении $x/r_{eq}=2$, т. е. в начальном участке. При $x/r_{eq}=10$ различия уже не превышают 10%. Далеко от среза сопла при $x/r_{eq}=150$ профили скорости для направлений y и z отличаются от профиля осесимметричной эквивалентной струи не более чем на 2%.

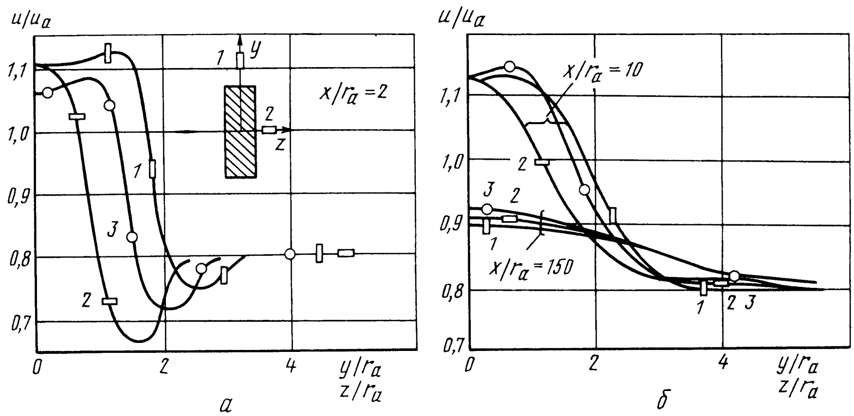


Рис. 4.20. Профили скорости в различных поперечных сечениях пространственной струи

Представляет также интерес ход зависимостей характерных поперечных координат $y_{0,5}(x)$ и $z_{0,5}(x)$ профилей u, соответствующих полусумме значений на оси и в невозмущенном потоке. Такие зависимости представлены на рис. 4.21, где *1* — направление y; *2* — направление z; *3* — эквивалентная осесимметричная струя. По представленным результатам видно, что полутолщина $z_{0,5}(x)$ сначала возрастает до максимума, положение которого совпадает с минимумом давления на оси. Далее с ростом давления $z_{0,5}(x)$ уменьшается, а начиная примерно с $x/r_{eq}\approx 15$, где давление практически стабилизируется, величина $z_{0,5}(x)$ практически линейно возрастает. Полутолщина $y_{0,5}(x)$ сначала ведет себя примерно так же, как и $z_{0,5}(x)$ (за исключением участка немонотонности $4 \lesssim x/r_{eq} \lesssim 10$), но далее на участке $17 \lesssim x/r_{eq} \lesssim 50$ остается примерно постоянной, а далее, как и $z_{0,5}(x)$, линейно возрастает. В сечении $x/r_{eq} \approx 40$ кривые $y_{0,5}(x)$ и $z_{0,5}(x)$ пересекаются и растут примерно с одинаковой скоростью. На большом расстоянии от среза сопла наблюдается тенденция к сближению этих кривых.

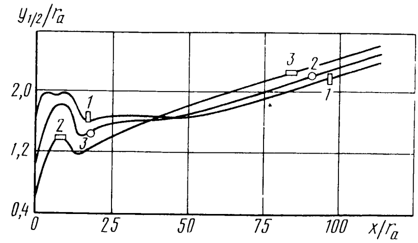


Рис. 4.21. Изменение по длине струи границ полуширины

Если для прямоугольного сопла в различных сечениях x построить границы полуширины, то видно, что с ростом x прямоугольник постепенно превращается в эллипс, большая ось которого соответствует большой оси сопла. Затем эти кривые становятся почти круговыми ($x/r_{eq} \approx 40$). При дальнейшем увеличении x кривые снова принимают вид эллипсов, однако теперь большая ось эллипса повернута на 90° по отношению к большой оси отверстия.

Таким образом, на начальном и переходном участках струи более интенсивно расширяются в направлении малой полуоси. Объясняется это тем, что в первом приближении в начальном сечении прямоугольную струю в направлении малой полуоси z можно считать плоской, а в направлении оси y — осесимметричной. Плоская струя расширяется быстрее, чем круглая, поэтому в направлении малой оси струя расширяется быстрее.

Интересно рассмотреть поведение полуширины струи, истекающей из квадратного сопла. Как уже отмечалось, распределение газодинамических параметров вдоль оси для квадратного сопла практически совпадает с распределением параметров вдоль оси осесимметричной струи.

Однако если рассмотреть профили в различных поперечных сечениях в направлении y и в диагональной плоскости, то можно заметить, что струя, истекающая из квадратного сопла, еще достаточно долго сохраняет трехмерные особенности, несмотря на полное совпадение параметров вдоль оси начиная с $x/r_{eq}=20$. Особенно хорошо это прослеживается, если рассматривать границы полуширины квадратного сопла вдоль оси y и вдоль диагонали квадрата R. На начальном участке полуширина вдоль оси y растет быстрее, чем вдоль R, и при $x/r=4$ кривые изменения полуширины пересекаются и струя как бы поворачивается на 45°, ось становится диагональю отверстия, R — его полушириной.

Вторичное пересечение этих кривых происходит при $x/r_{eq}=22$, после чего характерные оси в квадратной струе занимают свое первоначальное расположение. На большом расстоянии от среза сопла ($x/r_{eq}>100$) струя из квадратной становится почти осесимметричной.

Результаты этих расчетов позволяют понять основные качественные закономерности течения в вязкой струе, истекающей из неосесимметричного сопла. Можно отметить, что эти качественные особенности в основном согласуются с наблюдаемыми экспериментально для несжимаемых турбулентных струй.

В опытах с несжимаемыми турбулентными струями, истекающими из прямоугольного сопла (см. работу [58]), также наблюдалось значительно более интенсивное расширение струи в направлении, перпендикулярном более широкой стороне сопла, в результате чего приблизительно прямоугольная начальная ее форма на некотором расстоянии меняла свою ориентацию на 90°. Также было показано, что длина переходного участка, за которым закон затухания осевой скорости становится таким же, как и в осесимметричной струе ($u \sim 1/x$), зависит от отношения d/l сторон сопла. На основании обобщений получено, что таким образом определенная длина переходного участка оказывается примерно равной $x_*/r_{eq} \geqslant k(l/d)$, где для $d/l \simeq 0{,}3$ $k \simeq 8$. Для поперечных профилей скорости в двух взаимно перпендикулярных направлениях y и z найдено, что при $x \geqslant 10d$ имеет место их подобие, если использовать координаты $y/y_{0,5}$ и $z/z_{0,5}$. На основании анализа этих данных в работе [58] делается вывод о том, что при истечении несжимаемой турбулентной струи из прямоугольного сопла прежде всего становятся универсальными профили параметров в поперечных сечениях, далее по продольной координате устанавливается закономерность осевых параметров по закону $1/x$. При этом волнообразная перестройка границ струи может еще не закончиться.

Установление подобного рода обобщений применительно к недорасширенным пространственным струям по имеющемуся расчетному материалу в настоящее время не представляется возможным, поскольку необходим учет влияния таких параметров, как n, M_a, M_∞, а также особенностей ламинарного и турбулентного режимов и ударно-волновой структуры.

На основании экспериментальных и расчетных данных по структуре осесимметричных недорасширенных струй можно полагать, что длина переходного участка струй, истекающих из прямоугольных и эллиптических сопл, должна быть связана как с темпом протекания процессов вязкого перемешивания, так и с размерами ударно-волновой структуры. Если конец переходного участка определять как координату, где закон изменения осевой скорости уже близок к осесимметричному, то по длине этого участка характер поперечных профилей параметров должен существенно изменяться как в осесимметричной, так и в пространственной струе. В конце этого участка для профилей скорости можно ожидать почти полного их подобия профилям в основном участке при использовании нормировки поперечной координаты y к полуширине $y_{0,5}(x)$. Выше по течению, где существенно влияние ударно-волновой структуры, использование такой нормировки для достижения подобия профилей является уже недостаточным. В связи с этим представляется вполне естественным, что авторы [7 . . . 9] не обнаружили достаточно хорошей корреляции профилей скорости по всей длине переходного участка струи, истекающей из прямоугольного сопла (см. рис. 4.19 . . . 4.21). Следует также отметить, что по представленным на рис. 4.19 . . . 4.21 данным невозможно достаточно четко зафиксировать сами размеры как переходных, так и начальных участков, поскольку размеры начальных участков, по-видимому, являются заниженными из-за влияния аппроксимационной вязкости расчетного метода. Последнее подтверждается тем, что для достаточно хорошо предсказываемого случая осесимметричной струи (кривая *3* на рис. 4.19) длина начального участка оказывается примерно в два раза меньшей, чем это следует из других данных (см, например, разд. 3 [9]).

Вместе с тем при обсуждении характера продольных и поперечных профилей, представленных на рис. 4.19 и 4.20, было отмечено, что для исследованного режима истечения результаты расчета для прямоугольных сопл с параметром $d/l=0{,}3$ отличаются от результатов для осесимметричного случая не более чем на 10% при $x/r_{eq}\gtrsim 10$, т. е. практически во всем переходном участке и ниже по течению. На этом основании в пределах указанной погрешности для приближенных оценок можно заменять струю из прямоугольных и эллиптических сопл при $d/l\lesssim 0{,}3$ эквивалентной по расходу осесимметричной струей и с теми же значениями n, M_a, M_∞. Однако, как уже указывалось, для более адекватного описания истечения из неосесимметричных сопл необходимы дополнительные данные.

4.2.2. Взаимодействие струй при истечении из компоновок сопл

В технических устройствах очень часто используются компоновки достаточно близко расположенных сопл. Такие компоновки реализуются, например, в двигательных установках реактивных ЛА, разнообразных технологических устройствах и пр. При истечении неизобарических струй из таких компоновок наблюдаются специфические явления, обусловленные вязким и ударно-волновым взаимодействием между отдельными струями, результатом которых является образование суммарной струи, приобретающей на достаточно больших расстояниях от компоновки почти осесимметричный характер. Особенности этого взаимодействия зависят от конструктивного вида той или иной компоновки, и поэтому при описании свойств струйного течения в дополнение к параметрам, определяющим течение в струе из одиночного сопла, здесь должны быть учтены и геометрические параметры конкретной компоновки.

Формы применяемых компоновок чрезвычайно разнообразны, поэтому представляется затруднительным даже просто их перечислить. В то же время в практике довольно часто используются компоновки из одинаковых сопл, расположенных в виде тесной группы с тем или иным типом симметрии (например, линейные или кольцевые компоновки, состоящие из сопл, равномерно расположенных вдоль прямой линии или окружности). Применяются двойные кольцевые компоновки, двойные и тройные линейные, а также кольцевые с центральным соплом.

Если в кольцевой или линейной компоновке число сопл достаточно велико, а сами сопла расположены тесно, то истекающие струи после их взаимодействия и слияния в непосредственной близости от срезов сопл образуют единую струю, близкую по своей структуре к струе из кольцевого или прямоугольного сопла соответственно. Отличия от последних состоят в дополнительных потерях полного давления, обусловленных взаимодействием отдельных струй вблизи компоновки.

При уменьшении числа сопл в кольцевой компоновке и увеличении расстояния между ними на структуре струи все более заметно сказываются эффекты пространственности течения. Так, для достаточно плотной кольцевой компоновки из четырех одинаковых сопл, часто применяемой в конструкциях реактивных ЛА, как будет показано далее, характер течения на режиме недорасширения оказывается в значительной степени сходным со случаем истечения из квадратного сопла. В то же время в области взаимодействия струй от различных сопл компоновки сохраняются свойства, характерные для кольцевой струи без центрального тела. Далее основное внимание будет уделено именно таким компоновкам, что связано как с довольно частым ее применением, так и с наиболее полным экспериментальным и расчетным материалом, имеющимся в настоящее время в литературе.

Следует упомянуть также о нередко используемой простейшей компоновке, состоящей из двух одинаковых сопл. Структурные особенности истечения из такой компоновки зачастую используются в анализе как простейший элемент более сложных компоновок.

На рис. 4.22, *а* и *б* показаны схемы двухсопловой и четырехсопловой компоновок с донным экраном ЛА, который, как будет разъяснено далее, является существенным элементом многосопловой компоновки, влияющим на интенсивность взаимодействия струй, и особенно при истечении в спутный поток.

Расстояние l_c между срезами сопл и донным экраном, отнесенное к радиусу сопл r_a, называется *параметром выноса* $\overline{l_c} =$

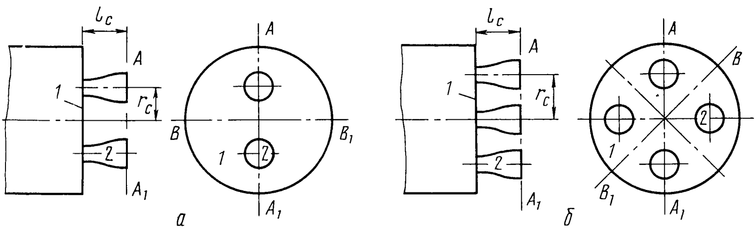


Рис. 4.22. Геометрия двухсопловой *(а)* и четырехсопловой *(б)* компоновок: 1 — донный экран, 2 — сопло, AA_1 — центральная плоскость, BB_1 — плоскость взаимодействия, l_c — вынос сопл, r_c — разнос сопл

$=l_c/r_a$. Расстояние r_c между центром компоновок и центром сопла, отнесенное к радиусу сопла r_a, называется *параметром разноса* сопл $\bar{r}_c=r_c/r_a$. Плоскости AA_1 на рис. 4.22, проходящие через центры противоположных сопл и ось, называются *центральными плоскостями* (или плоскостями симметрии), а плоскости BB_1x, проходящие между соплами и через ось x — *плоскостями взаимодействия.*

Таким образом, дополнительными параметрами, определяющими истечение струи из многосопловой кольцевой компоновки, являются параметры выноса — l_c и разноса $\bar{r}_c$ сопл, а также число N_a сопл в компоновке.

Следует отметить, что взаимодействие струй от отдельных сопл компоновки является довольно значительным турбулизирующим фактором, ввиду чего наиболее типичным режимом течения в многосопловых струях является турбулентный режим. Только для случая истечения в покоящуюся среду с достаточно низкой плотностью или для условий полета на высотах порядка 100 км и более, когда степень нерасчетности истечения бывает обычно очень велика, можно говорить о реализации ламинарного режима течения.

Рассмотрение закономерностей взаимодействия многосопловых недорасширенных струй начнем со случая степеней нерасчетностей n, незначительно превышающих единицу. В качестве иллюстрации картины истечения при таких режимах можно использовать данные численных расчетов, проведенных [7 . . . 9] с использованием уравнений Навье—Стокса в параболическом приближении. Авторами рассматривалась следующая специальная модельная схема распространения четырех симметрично расположенных относительно оси x струй воздуха в однородный спутный воздушный поток. В соответствии с ограничениями параболического приближения во всей расчетной области $x\geqslant0$ течение полагалось сверхзвуковым. В начальном сечении $x=0$, совмещаемым с местоположением истечения струй, задавались распределения давления, температуры и скорости. Причем поперечные составляющие скорости полагались нулевыми по всему

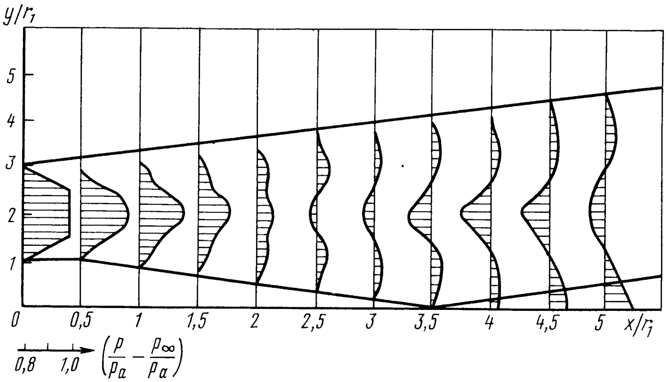


Рис. 4.23. Профили избыточного давления $\Delta p = p_\infty$ в различных сечениях пространственной вязкой струи в плоскости симметрии, проходящей через центры сопл

начальному сечению. В проведенной серии расчетов значения безразмерных параметров были следующими: число Маха струй в начальном сечении $M_a=2{,}5$, число Маха невозмущенного спутного потока $M_\infty=2$, отношение статических температур $T_\infty/T_a=1$. Степень нерасчетности n, параметр разноса $\bar{r}_c=r_c/r_a$ и число Рейнольдса Re_a варьировались в следующих пределах: $1\leqslant n\leqslant 5$; $1{,}55\leqslant \bar{r}_c\leqslant 3{,}14$; $10^3\leqslant \mathrm{Re}_a\leqslant 10^4$. Режим течения во всей области течения полагался ламинарным. Параметр выноса $\bar{l}_c$ не входил в число определяющих, поскольку в принятой постановке задачи донный экран вообще отсутствовал.

Последнее обстоятельство и определило специфичность данной постановки задачи, поскольку согласно такой схеме в окрестности оси x взаимодействие между струями происходило в условиях непосредственного протекания через эту зону высоконапорного спутного потока, оттесняющего линии тока рассматриваемых струй от оси.

На рис. 4.23 ... 4.26 представлены некоторые результаты расчетов при $\bar{r}_c=2{,}83$; $\mathrm{Re}_a=350$. Для нерасчетности $n=2{,}5$ на рис. 4.23 представлены профили избыточного давления $\Delta p=p-p_\infty$ в различных сечениях вязкого пространственного потока в плоскости симметрии, проходящей через оси противоположных струй, а на рис. 4.24 и 4.25 картины изобар и изотерм температуры торможения в сечениях $x/r_a=5$ и $x/r_a=10$ соотвественно. Отчетливо наблюдаются возникновение и распространение вниз по течению волн сжатия и разрежения, а также трехмерный вид распределения параметров, отличающийся вытягиванием изобар и изотерм в направлении между струями, что имеет сходный характер с переориентацией на угол $\pi/4$ в струе из квадратного сопла. По распределениям давления вдоль оси всей системы струй, представленной на рис. 4.26 для значений степени нерас-

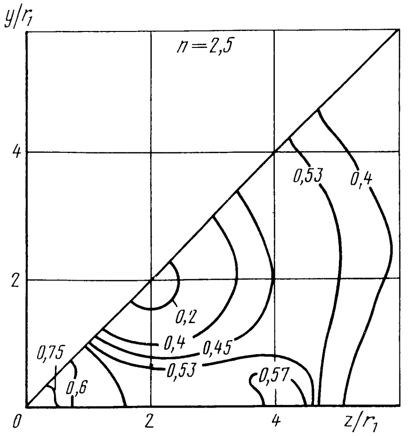


Рис. 4.24. Изобары в пространственной вязкой струе

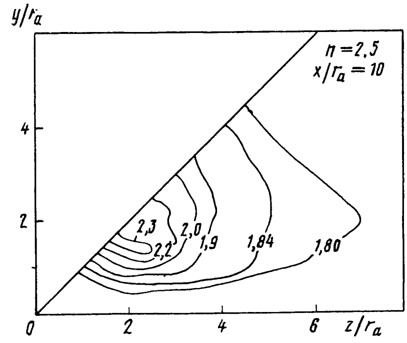


Рис. 4.25. Изотермы в пространственной вязкой струе

четности $n=1$; 1,25; 2,5; 5, можно проследить рост возмущений при увеличении n.

Интересно отметить, что в расчетах для $n=1$ авторами [7 . . . 9] получены поля изобар и изотерм качественно подобные, представленные на рис. 4.24 и 4.25 и отличающиеся только меньшей интенсивностью возмущений.

Можно предложить следующую интерпретацию картины взаимодействия в рассматриваемой системе струй с втекающим внутрь этой системы сверхзвуковым спутным потоком. Появление поперечных (хотя и малых, но конечных по величине) составляющих скорости в расширяющихся струях приводит к возникновению волн сжатия по обе стороны контактного разрыва, которые при увеличении степени нерасчетности формируются в косые скачки уплотнения. Эффекты вязкого трения в нарастающем вдоль контактного разрыва слое смешения приводят к явлению вязкого взаимодействия, вызывающему расталкивание волн сжатия или скачков уплотнения и более интенсивное расширение вниз по течению образовавшегося между ними вязкого сжатого слоя. Пересечение границы этого слоя с осью системы приводит к образованию первой волны сжатия, наблюдаемой на графиках рис. 4.26. Разрежение, следующее за волной сжатия при $n>1$, обусловливается характерным для

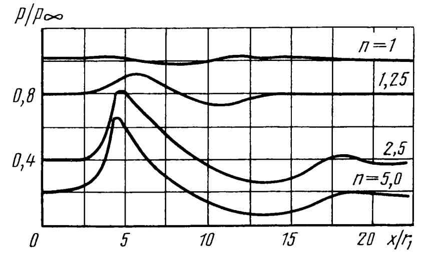


Рис 4 26. Распределение давления вдоль оси четырехсопловой компоновки режима недорасширения падением давления вдоль осей каждой из отдельных струй. Местоположение второй волны сжатия на графиках рис. 4.26, отвечающее $n>1$, примерно соответствует пересечению висячего скачка на оси одиночной струи, что, по-видимому, и свидетельствует о причине возникновения этой второй волны. Объяснить появление второй волны сжатия для случая $n=1$ более затруднительно. Возможно она вызвана распространением возмущений, вызванных первой волной.

Обращает на себя внимание резкий рост перепада давлений в первой волне сжатия при увеличении степени нерасчетности. Аппроксимационная зависимость p_m/p_∞ от n, полученная в диапазоне $1 \leqslant n \leqslant 5$, по данным рис. 4.26 имеет практически линейный ход $p_m/p_\infty=(0{,}6n+0{,}5)$. Если при $n=2{,}5$ величина p_m/p_∞ равна 2, то при $n=5$ она уже равна 3,5, тогда как перепад давлений в прямом скачке для $M_\infty=2$ составляет величину 4,5. Поэтому, по всей видимости, значение $n=5$ является практически предельным значением степени нерасчетности, до которой возможно использовать принятую авторами [7 . . . 9] расчетную схему. При большем значении n величина перепада p_m/p_∞ возрастает еще больше, что приведет к образованию дозвуковой зоны течения, наличие которой сделает невозможным применение в таких условиях параболического приближения. В действительности начиная с некоторого n, при котором расширение отдельных струй станет достаточно большим, перед всей системой (т. е. при $x<0$) должна образоваться отошедшая ударная волна.

Несмотря на отмеченные ограничения, рассмотренные результаты расчетов позволяют составить достаточно отчетливое представление об основных качественных особенностях пространственной структуры многосопловой струи при небольших недорасширениях. Расчеты показали, что если на небольших расстояниях от начального сечения характер течения существенно трехмерный и по очертаниям наружных границ система четырех струй имеет подобие со струей из квадратного сопла, то на больших расстояниях влияние трехмерности постепенно пропадает и течение в системе нескольких струй оказывается близким к течению в одиночный осесимметричной струе.

Следует отметить, что помимо демонстрации отмеченных качественных особенностей авторы [7, 9] сделали попытку получить обобщения для границ протяженности течения, до которых эффекты трехмерности приводят к существенным отклонениям от эквивалентной осесимметричной струи с расходом, равным сумме расходов всех струй системы. В качестве меры заметного отклонения ими было принято отличие в величинах статической температуры на 5%. Для построения обобщений варьировались степень нерасчетности ($1 \leqslant n \leqslant 5$), число Рейнольдса при ламинарном режиме ($10^3 \leqslant \mathrm{Re}_a \leqslant 10^4$), параметр разноса ($1{,}55 \leqslant \overline{r}_c \leqslant 3{,}14$) и число сопл в системе ($N_a=1$, 2, 3, 4, 5, 8, 9), но оставались фиксированными числа Маха $M_a=2{,}5$ и $M_\infty=2$, температурный фактор $T_\infty/T_a=1$ и параметр спутности $m=1{,}25$, а параметр выноса, существенный для используемых в практике компоновок с донным экраном, вообще отсутствовал. Поэтому, имея в виду особую специфику рассмотренной схемы без донного экрана, а также ограничение узким диапазоном степени нерасчетности, ламинарных чисел Рейнольдса и необследованность влияния параметров M_a, M_∞ и m, ориентироваться на эти обобщения для практических задач вряд ли следует.

Рассмотрим истечение струй из компоновок сопл, подобных по своему конструктивному оформлению компоновкам, используемым в двигательных установках ЛА для полета на больших высотах. При этом ограничимся в основном примерами истечения из кольцевых четырехсопловых компоновок с донным экраном и турбулентным режимом.

Развитие течения в системе струй от таких компоновок можно проследить по фотографиям, представленным в работе [23].

Видно, что при $n>10$ в результате интенсивного взаимодействия между струями от различных сопл компоновки, несмотря на возникновение системы интерференционных скачков, формируется единая суммарная струя, сходная с недорасширенной струей от одиночного сопла по наличию характерных бочкообразных структур. При этом отчетливо выделяется первая бочкообразная структура, которая может быть определена как начальный участок многосопловой струи. Как и в струе от одиночного сопла с увеличением n число бочкообразных структур уменьшается вследствие интенсивных диссипативных процессов, обусловленных вязкими и ударно-волновыми процессами.

По фотографиям [23] можно установить, что при $n>10$ в начальном участке образуется общий бочкообразный скачок суммарной струи. При образовании этого скачка, можно выделить две характерные области: область ударно-волнового взаимодействия и область суммарной струи. Первую область условно определили как участок между срезами сопл и плоскостью, перпендикулярной оси системы и проходящей через точки пересечения в центральной плоскости интерференционного скачка уплотнения с висячим скачком от одиночного сопла. Областью суммарной струи будем называть зону потока, расположенную ниже по течению от области ударно-волнового взаимодействия. Режим истечения, при котором образуется общий бочкообразный скачок уплотнения, будем называть *режимом развитого взаимодействия*. Значение степени нерасчетности, при которой наступает режим развитого взаимодействия, существенно зависит от параметра $\bar{r}_c=r_c/r_a$ разноса сопл, а именно при увеличении $\bar{r}_c$ значения этой степени нерасчетности также увеличивается. Когда степень нерасчетности значительно превосходит свое значение, отвечающее наступлению режима развитого взаимодействия, протяженность участка ударно-волнового взаимодействия становится малой по сравнению с длиной начального участка и последний приобретает очертания, сходные со случаем истечения из одиночного сопла. Далее на основании исследований полей распределения газодинамических параметров, проведенных И. М. Карпманом с соавторами, показано, что пространственный характер начального участка суммарной струи из четырехсопловой компоновки имеет подобие со струей из квадратного сопла.

Для наглядного представления о процессе ударно-волнового взаимодействия полезно рассмотреть его на примере двух соседних струй. С этой целью обратимся к результатам численных расчетов по уравнениям идеального газа, выполненных в работе [67]. На рис. 4.27 и 4.28 представлены данные этой работы, иллюстрирующие взаимодействие струй, истекающих в затопленное пространство из линейной компоновки сопл с числом $M_a=2$ при $n=6$. Кривые на этих рисунках соответствуют линиям M=const при $\Delta M=0{,}2$ для центральной плоскости (рис. 4.27) и поперечного сечения $x_c/r_a=8$ (рис. 4.28). Штриховкой на рис. 4.28 показаны проекции кромок сопл. Хорошо прослеживаются скачки, возни-

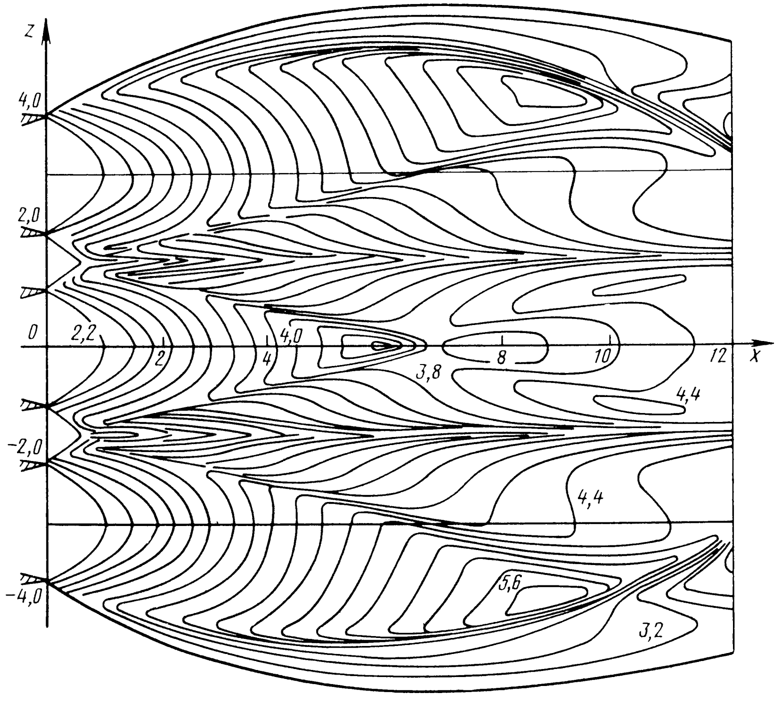


Рис. 4.27. Поле течения при взаимодействии нескольких круглых сверхзвуковых струй в плоскости симметрии

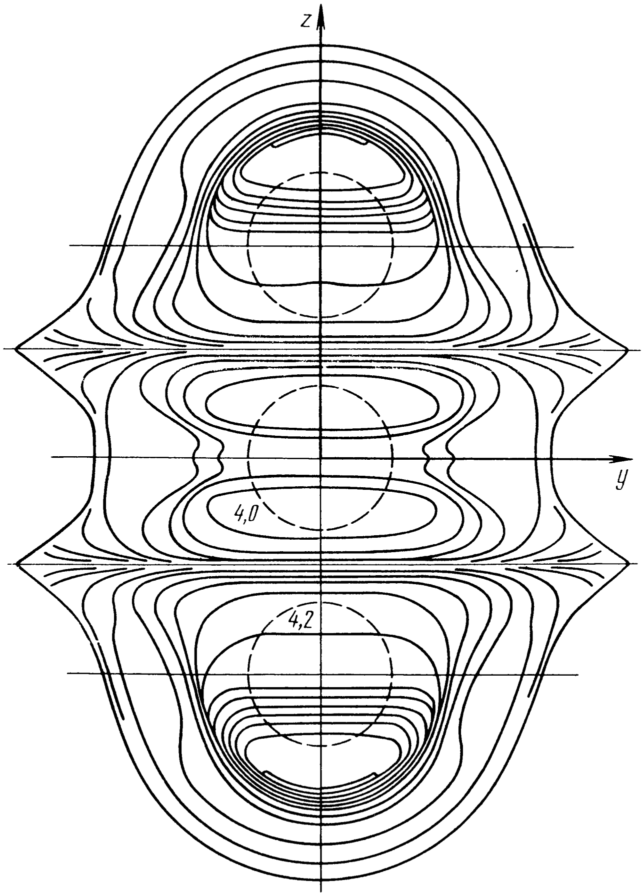


Рис. 4.28. Поле течения при взаимодействии нескольких круглых сверхзвуковых струй в сечении $x/r_a=8$

кающие при взаимодействии двух соседних струй, и образование при $x/r_a=10$ скачка суммарной струи.

В случае реального течения геометрическая форма интерференционных скачков зависит от конструкции компоновки и условий в окружающей среде, в которую истекает струя (затопленное пространство, спутный поток). Конструкция компоновки задает конфигурацию так называемой *донной области*, ограниченной донным экраном, обращенными внутрь наружными стенками сопл и границами взаимодействующих струй. При больших степенях нерасчетности n, когда струи от сопл компоновки расширяются достаточно сильно, под влиянием вязкости в области столкновения струй формируется возвратный поток газа, направленный в сторону донного экрана. Этот газ растекается у донного экрана и вытекает из донной области между соплами компоновки. Соотношение между интенсивностью возвратного течения, пропускной способностью каналов между соплами и противодавлением в окружающей среде определяет величину донного давления $p_д$. Когда степень нерасчетности достигнет такой величины, при которой из-за возрастания интенсивности течения отношение донного давления к давлению в окружающей среде превысит величину критического перепада, тогда условия в донной области зависеть от величины противодавления перестанут. Такой режим условий в донной области компоновки называют режимом запирания. Этот режим обычно осуществляется при режиме развитого взаимодействия струй многосопловой компоновки.

При невысоких степенях нерасчетности когда струи от отдельных сопл расширяются слабо и бочкообразный скачок суммарной струи не образуется, для некоторого n, характерного для конкретной компоновки, возвратное течение в донной области прекращается и далее с уменьшением n условия в донной области меняются на противоположные. Слабо расширяющиеся струи начинают эжектировать газ из донной области и вследствие образования разрежения в нее через межсопловые проходы начинает втекать газ из окружающей среды. Такой режим течения в донной области называют *режимом эжекции.*

Особенности пространственной структуры многосопловых струй на режиме эжекции и при переходе к режиму запирания, на которых здесь не останавливаемся, экспериментально исследованы в работах А. М. Сизова, которые читатель найдет в периодической литературе. Из этих работ следует, что структура струй при таких режимах в значительной степени зависит от конструкции многосопловых компоновок и, в частности, наличия донного экрана, параметров выноса и разноса сопл.

Рассмотрим течение в струях многосопловых компоновок при режиме развитого взаимодействия, исследованного в работах [23, 69]. Для таких режимов течения в этих работах было показано, что при достаточно больших степенях нерасчетности, при которых область ударно-волнового взаимодействия оказывается достаточно малой по сравнению с размерами всего начального участка, многосопловая струя приобретает ряд свойств автомодельного характера, сходных со свойствами струи от одиночного сопла. Далее анализ данных о течении для многосопловых струй проводится в сравнении с данными для одиночных струй.

Результаты экспериментальных исследований и анализ подобия сильно недорасширенных одиночных струй показали, что их структура в основном определяется такими интегральными характеристиками, как величины импульса на срезе и расхода, а конкретные особенности течения вблизи сопла формирования струи не оказывают заметного влияния на структуру струи на расстояниях порядка X. Это привело к идее аналитически описать данные экспериментов по характерным размерам суммарной струи многосопловой системы введением понятия эквивалентного сопла, т. е. такого сопла, которое на своем срезе имело бы величины импульса $\mathcal{J}_{eq}$ и расхода G_{eq}, равные соответственно сумме импульсов $\mathcal{J}_k$ и расходов G_k всех N сопл данной системы:

$$\mathcal{J}_{eq}=\sum_{k=1}^{N}\mathcal{J}_k;\quad G_{eq}=\sum_{k=1}^{N}G_k\,. \tag{4.4}$$

Для простейшего и практически важного случая симметрично расположенных сопл с одинаковыми параметрами эквивалентное сопло определяется как сопло, имеющее те же параметры на срезе, что и каждое из сопл системы, и диаметр которого связан с диаметром d каждого сопла соотношением

$$d_{eq}=d_aN^{0,5}\,. \tag{4.5}$$

В частном случае системы двух сопл с различными параметрами на срезе, но при одинаковых полных давлениях, температурах торможения и рабочих газах, выражения (4.4) при использовании изоэнтропийных соотношений для температуры, давления и скорости газа дают для определения характеристик эквивалентного одиночного сопла (числа Маха M_{eq}, диаметра d_{eq}) следующие уравнения:

$$d_{eq}^2\frac{\gamma\mathrm{M}_{eq}^2+1}{\left[1+1/2(\gamma-1)\mathrm{M}_{eq}^2\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}=\sum_{k=1}^{N}d_k^2\frac{\gamma\mathrm{M}_k^2+1}{\left[1+1/2(\gamma-1)\mathrm{M}_k^2\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}; \tag{4.6}$$

$$d_{eq}^2\mathrm{M}_{eq}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M}_{eq}^2\right)^{\frac{1(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}}=\sum_{k=1}^{N}d_k^2\mathrm{M}_k\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M}_k^2\right)^{\frac{1(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}}, \tag{4.7}$$

где d_k и M_k — диаметр выходного сечения и число Маха на срезе k-го сопла. Условие равенства полных давлений дает значение некоторой эффективной степени нерасчетности суммарной струи, истекающей из эквивалентного сопла.

Для наиболее общего типа системы сопл при определении характеристик эквивалентного сопла уравнения (4.7) следует дополнить необходимым числом уравнений для усреднения всех определяющих параметров течения (энтальпии, отношения удельных теплоемкостей и т. д.).

Экспериментальная проверка гипотезы эквивалентного сопла для случая симметрично расположенных сопл с одинаковыми характеристиками была выполнена для турбулентного и ламинарного режимов течения в слое смешения в следующем диапазоне параметров: $N=2$; ,4; 6; $\mathrm{M}_a=1\ldots4$; $\mathrm{M}_\infty=0\ldots10$; $n=1\ldots10^4$; $r_c/n_a=1{,}8\ldots15$. Анализ результатов показал, что для любой комбинации M_a, M_∞, r_c/r_a существует некоторое значение степени нерасчетности струи n_1, начиная с которого применение понятия

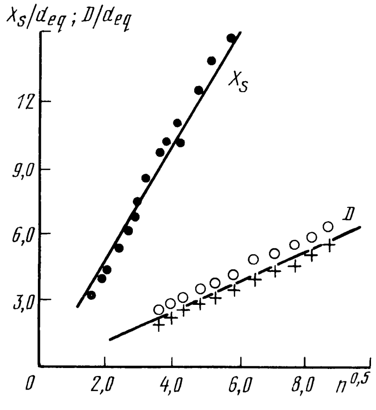


Рис 4.29. Сопоставление результатов экспериментов по расстоянию X_s (●) до центрального скачка уплотнения и максимальному поперечному размеру D висячего скачка уплотнения суммарной струи, определенному в плоскостях взаимодействия (○) и центральной (+) с результатами расчета для эквивалентного сопла (———)

эквивалентного сопла позволяет с удовлетворительной точностью предсказать характерные размеры начального участка струи от системы сопл. При этом для $n \geqslant n_1$ область суммарной струи в начальном участке значительно больше области взаимодействия.

На рис. 4.29 представлены результаты измерений расстояния X_S до центрального скачка уплотнения и максимального поперечного размера D висячего скачка уплотнения суммарной струи четырехсопловой системы при $M_a=3$; $M_\infty=3,1$; $r_c/r_a=1,8$ для случая турбулентного режима течения. Поперечный размер D висячего скачка определен для плоскости взаимодействия (кружки) и центральной плоскости (точки). Размеры X_S и D здесь отнесены к диаметру эквивалентного сопла, определенному по соотношению (4.5). Сплошные линии *3* и *4* дают соответственно величины X_S и D одиночной эквивалентной струи, рассчитанные по формулам (2.3), (2.4) и (2.66), (2.67).

Висячий скачок уплотнения не является осесимметричным, а имеет форму, близкую к квадратной. Его поперечные размеры в двух указанных плоскостях различаются на 20%, а результаты расчета величины D для эквивалентной струи занимают при этом примерно среднее положение.

Экспериментальные результаты проверки гипотезы эквивалентного сопла для системы двух сопл с различными параметрами показаны на рис. 4.30. Эти результаты также относятся к турбулентному режиму. Согласно выражениям (4.6) и (4.7) число Маха и диаметр эквивалентного сопла для рис. 4.30, *а* соответственно равны $M_{eq}=1$; $d_{eq}=(d_1^2+d_2^2)^{0,5}$, а для рис. 4.30, *б* — $M_{eq}=1,75$; $d_{eq}=1,6d$. Из рис. 4.30 видно, что в обоих случаях расчет расстояния до центрального скачка по методу эквивалентного сопла и при использовании соотношений (2.3) и (2.66) достаточно хорошо согласуется с результатами экспериментов.

Данный метод имеет смысл только для такой системы, отдельные сопла которой имеют сравнимые по величине расходы G_r и импульсы J_k. Если же, например, в двухсопловой системе одно из сопл имеет значения G_1 и J_1, на порядок превышающие соответственно G_2 и J_2 то в таком случае этот метод неприменим и

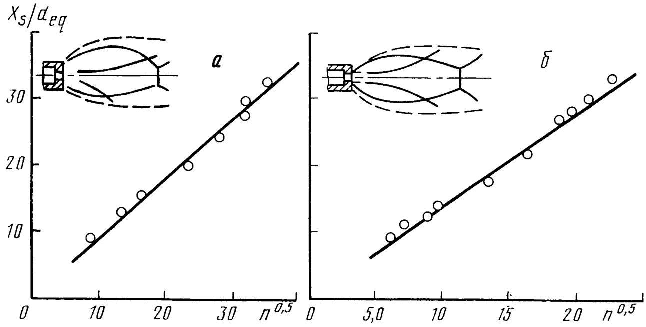


Рис 4.30. Сопоставление результатов экспериментов (○) по расстоянию до центрального скачка для системы двух сопл с $M_1=M_2=1$ и отношением $d_1/d_2=0{,}67$ (*а*) и с $M_1=1$, $M_2=2$ и $d_1=d_2$ (*б*) с результатами расчета эквивалентного сопла (————)

здесь следует говорить просто о малом возмущении струи от первого сопла.

Ранее указано, что метод эквивалентного сопла применим для такой степени нерасчетности $n \geqslant n_1$, при которой уже образовалась суммарная струя, и характерный размер последней больше размера области взаимодействия. Отсюда следует, что данный метод применим и в случае систем с сильно разнесенными соплами (большие r_c/r_a), но при этом нижняя граница применимости метода сдвигается в сторону больших значений степени нерасчетности. Это утверждение подтверждено экспериментами.

Однако наилучшее соответствие расчетов по эквивалентному соплу с экспериментами имеет место для компоновок с симметрично расположенными соплами и при значениях параметра $\bar{r}_c$, незначительно превышающих единицу.

Установленная возможность определения характерных размеров начального участка суммарной струи не означает полной тождественности течения от системы сопл с течением от одиночного эквивалентного сопла. В действительности взаимодействие струй от отдельных сопл системы приводит к появлению ряда особенностей, качественно отличающих многосопловую струю от односопловой. Это относится к течению в области вязкого сжатого слоя за висячим скачком, в области взаимодействия, а также в области, ограниченной висячим скачком уплотнения суммарной струи, в которой необходимо учитывать потери полного давления в скачках, образующихся при взаимодействии.

Профили газодинамических параметров суммарной струи и положение слоя смешения заметно отличаются от профилей газодинамических параметров и положения слоя в одиночной струе. В результате экспериментов выяснено, что течение в начальном участке многосопловой струи имеет трехмерный характер. Форма висячего скачка струи системы четырех сопл в поперечных сечениях близка к квадратной. Форма границы струи имеет крестообразный вид по всей длине начального участка струи вследствие растекания потоков газа в плоскости взаимодействия. Профили газодинамических параметров слоя смешения в плоскости взаимодействия многосопловой струи имеют «площадку» примерно постоянных температур и давлений. В конце начального участка площадки температур и давления сглаживаются вследствие вязкости и профили принимают вид, характерный для одиночной струи; ширина слоя смешения в плоскости взаимодействия существенно больше, чем центральной плоскости. Толщина слоя смешения δ в обеих плоскостях возрастает почти линейно с увеличением расстояния от среза сопла.

Наиболее полное представление о пространственной структуре струи системы четырех сопл дают поля давлений и полных температур в поперечных сечениях струи. На рис. 4.31 показана пространственная форма скачков уплотнения и изотермических линий полной температуры в сечениях струи $x/X_S=0{,}5$ и 1,5 (см. рис. 4.31, *а* и *б* соответственно, X_S — расстояние от среза сопла до центрального скачка уплотнения), соответствующая случаю истечения струй со следующими значениями определяющих параметров: $n=11$, $\mathrm{M}_a=3{,}15$, $\mathrm{M}_\infty=3{,}1$, $r_c/r_a=2$, $l_c=1$, $T_{0a}=600$ K, $T_{0\infty}=300$ K.

Линии *1* на рис. 4.31 соответствует положение в пространстве внешней границы струи, определенной по изотерме со значением $\Delta T=0{,}01$, линии *2* соответствует изотерма со значением $\Delta T=0{,}5$ и линии *3* — со значением $\Delta T=0{,}99$ [здесь $\Delta T=(T_0-T_{0\infty})(T_{0a}-T_{0\infty})^{-1}$, где T_0 — температура торможения в текущей точке].

Видно, что висячий скачок уплотнения (сплошная линия) имеет форму, близкую к квадратной, а форма границы струи

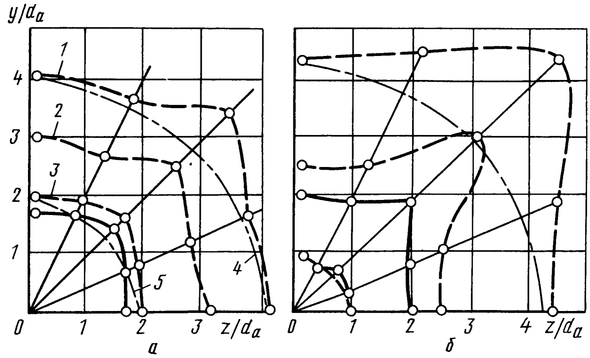


Рис. 4.31. Форма скачков уплотнения и полей полных температур в поперечных сечениях струи:

а — $x/X_s=0{,}5$; *б* — $x/X_s=1{,}5$; *1, 2, 3* — изотермы струи четырехсопловой компоновки; *4, 5* — изотермы эквивалентной осесимметричной струи, сплошные линии — скачок уплотнения значительно отличается от окружности и имеет крестообразный вид. Наиболее удалена от оси граница струи в сечении, проходящем между соседними соплами системы. Боковое растекание струи в плоскости взаимодействия приводит к увеличению ширины струи в этой плоскости.

Аналогичные результаты получены при числе $M_\infty=6$ в диапазоне степеней нерасчетности $n=20\ \ldots\ 150$. Сравнение результатов экспериментов при числах $M_\infty=3{,}1$ и 6 показывает, что отношение рразмера струи в плоскости взаимодействия к размеру струи в центральной плоскости практически не зависит от числа M_∞.

На рис. 4.31 дано сравнение границы одиночной эквивалентной струи и струи, истекающей из четырехсопловой системы. Кривые *4* и *5* соответствуют положению изотерм эквивалентной струи со значениями $\Delta=0{,}01$ и 0,99 соответственно. Сравнение показывает, что в центральной плоскости размеры эквивалентной одиночной струи и струи, истекающей из четырехсопловой системы, приближенно одинаковы. Это позволяет для определения размеров струи, истекающей из четырехсопловой системы (с достаточно тесным расположением сопл, т. е. при $r_c/r_a=2-3$), в центральной плоскости использовать зависимости (4.6) и (4.7).

Для определения размеров струи в плоскости взаимодействия обработка экспериментальных данных дает для системы четырех сопл следующие зависимости:

$$R_1/r_1=1+(1-n^{-0{,}5})^3(1+\lg x/l),\ R_2/r_2=1{,}2,\ x/l\geqslant 0{,}2,$$
$$n\geqslant 10,\ r_c/r_a\leqslant 3,\ M_a=3. \qquad (4.8)$$

Здесь R_1 и R_2 — положение в плоскости взаимодействия границ слоя смешения, определенных по значениям $\Delta T_1=0{,}1$ и 0,9 соответственно, а r_1 и r_2 — аналогичные размеры в центральной плоскости.

На рис. 4.32 приведены поперечные распределения полной избыточной температуры — ΔT и полного напора — p_0'. В сечениях $x/X_S=0{,}5$; 1; 1,5 для условий (см. рис. 4.31).

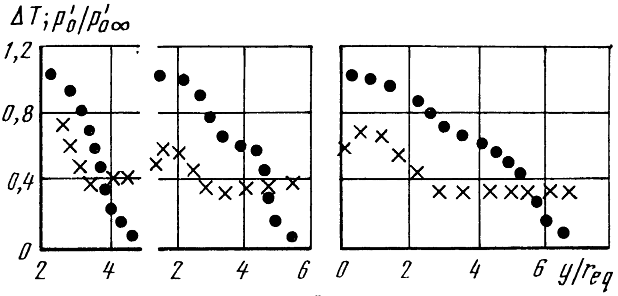


Рис 4.32. Поперечные профили полной температуры и полного напора в сечениях:
а $x/X_s=0{,}5$, *б* $x/X_s=1$, *в* $x/X_s=1{,}5$, ● профили ΔT, × — профили p_0'/p_∞'

Интересной особенностью полей полной температуры в плоскости взаимодействия является образование в некотором сечении по x, зависящем в общем случае от начальных данных, площадки температур. Образование площадки температур связано с боковым растеканием потока в плоскости взаимодействия при столкновении струй. При этом происходит втекание высокотемпературной массы газа в слой смешения, образовавшийся ранее на линии взаимодействия одиночных струй. Эффект втекания является также причиной образования площадки давления.

В рсботе [56] установлена приближенная автомодельность полей газодинамических параметров в турбулентной одиночной струе. В струе, вытекающей из системы четырех сопл, это свойство течения проявляется различным образом для плоскости взаимодействия и центральной плоскости. На рис. 4.33 приведены поля полного напора P_0' в сечении $x/X_S=0{,}75$ для трех степеней нерасчетности $n=11$; 26,7; 44. Безразмерная поперечная координата выбрана в виде $y/(\sqrt{n}\cdot r_{eq})$. Эксперименты проводились на той же модели, на которой получены данные рис. 4.31 и 4.32. Видно, что начиная со степени нерасчетности $n \approx 25$, поля полного напора в плоскости взаимодействия (для $n=11$, 26,7 и 44) автомодельны по степени нерасчетности n на участке между осью течения и площадкой давления.

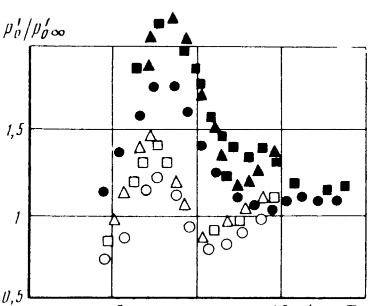


Рис. 4.33. Профили полного напора в сечении струи $x/X_s=0{,}75$ при различных n в плоскости взаимодействия (● — $n=11$; ■ — $n=26{,}7$; ▲ — $n=44$) и в центральной плоскости (○ — $n=11$; □ — $n=26{,}7$; △ — $n=44$)

В центральной плоскости (для $n=11$, 26,7 и 44) автомодельность полей полного напора наблюдаются при $n>25$ во всем поле течения между осью течения и внешней границей струи (см. рис. 4.33). Следует отметить, что в центральной плоскости профили полных напоров имеют вид, характерный для профилей одиночной струи, и особенностей типа площадки давлений не наблюдается на всей длине начального участка.

Аналогичные выводы относятся и к профилям избыточной полной температуры торможения ΔT. Обработка экспериментальных данных по слою смешения показывает, что характер смешения в центральной плоскости подобен протекающему в одиночной струе.

В плоскости взаимодействия профиль избыточной температуры торможения, как показано ранее, имеет более сложный вид.

Профиль состоит из двух частей — внутренней и внешней. Наклон профилей для каждой из частей различен. В конечном сечении начального участка струи площадка температур и давлений сглаживается: профиль избыточной температуры имеет при этом приближенно вид кривой, характерной и для одиночной струи.

Результаты эксперимента по ширине слоя смешения δ в зависимости от расстояния вдоль оси x приведены на рис. 4.34 (точки соответствуют степеням нерасчетности $n=11$, 26,7, 37, 44 и 60, δ — ширина слоя смешения, определенная по значениям $\Delta T=0{,}1$ и 0,9). В центральной плоскости ширина слоя совпадает с данными для одиночного сопла (точки, обозначенные 0) и изменяется линейно с изменением расстояния от среза сопла. В плоскости взаимодействия ширина слоя смешения существенно больше, чем в центральной плоскости, и также изменяется линейно с изменением расстояния. Разброс точек в данном случае больше, что связано, по-видимому, с некоторой зависимостью ширины слоя смешения от степени нерасчетности при относительно малых n. При увеличении n зависимость δ от n практически исчезает.

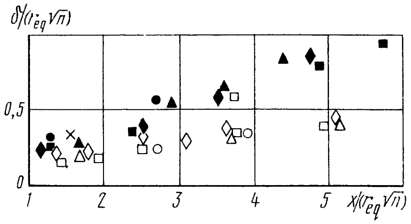


Рис. 4.34. Толщина слоя смешения δ при различных n в плоскости взаимодействия (◆ — $n=11$, ■ — $n=26{,}7$; ▲ — $n=37$; x — $n=44$; ● — $n=60$) и в центральной плоскости (◇ — $n=11$; □ — $n=26{,}7$; △ — $n=37$) в сравнении с δ для эквивалентной осесимметричной струи (○ — $n=44$)

Экспериментальные исследования профилей газодинамических параметров пространственной струи проводились в основном на четырехсопловых моделях с разносом сопл $\bar{r}_c=2$. Однако представляет несомненный интерес вопрос об использовании полученных результатов для систем с различными разносами сопл и различным числом сопл.

Растекание потока в многосопловой струе определяется взаимодействием соседних струй. Сравнение профилей избыточной температуры торможения в плоскости взаимодействия, полученных на двух- и четырехсопловых моделях с одинаковыми соплами и значениями параметра r_c, показывает, что границы струй для обоих случаев приближенно совпадают. При этом положение внутренней и внешней границ определялось относительно плоскости, проходящей через оси соседних сопл, а в качестве характерного размера использовался диаметр одного из сопл системы. Полученный экспериментальный результат позволяет в первом приближении распространять (в указанной ранее обработке) результаты, полученные для четырехсопловых систем на системы с большим числом сопл.

4.2.3. Истечение струи из сопла с косым срезом

На практике находят применение сопла, у которых плоскость выходного сечения не перпендикулярна его оси. Течение в струе, истекающей из такого сопла с косым срезом, имеет пространственный характер.

Рассмотрим коническое сопло с косым срезом (рис. 4.35). Декартову xyz и цилиндрическую $xr\varphi$ системы координат расположим следующим образом: x — ось сопла, отсчет ведется от точки пересечения с плоскостью выходного сечения; xy — плоскость симметрии (ось y составляет острый угол с внешней нормалью к плоскости выходного сечения);

$$\varphi = \mathrm{arctg}(z/y).$$

В работе [48] численно решена задача об истечении сверхзвуковой струи из сопла с косым срезом в вакуум. В этой работе подход, основанный на использовании криволинейной разностной сетки [19], обобщен на случай трехмерного течения. Это позволило маршевым методом получить решение в области, включающей участки течения, где проекция вектора скорости на ось сопла меньше скорости звука и принимает отрицательные значения. Определяющими параметрами задачи об истечении струи из сопла с косым срезом в вакуум являются: γ_a — показатель адиабаты истекающего газа, M_a — число Маха на тупой кромке сопла в плоскости xy в точке A (см. рис. 4.35), θ_a — полуугол раствора конического сопла (предполагается, что в сопле реализуется течение от источника), ψ — угол между осью сопла и нормалью к плоскости выходного сечения.

На рис. 4.36 сплошными линиями показаны линии постоянных чисел Маха в плоскости симметрии струи, истекающей из сопла с косым

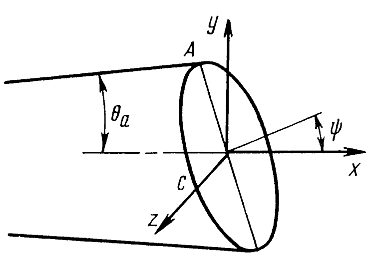


Рис. 4.35. Геометрия сопла с косым срезом

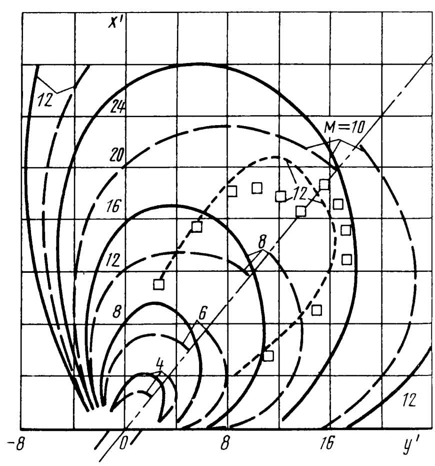


Рис 4.36. Распределение чисел Маха в плоскости симметрии при истечении из сопла с косым срезом

срезом при следующих начальных данных: число Маха на тупой кромке сопла $M_a=1{,}5$, $\theta_a=1{,}5°$, $\gamma_a=1{,}4$, $\psi=40°$. Система координат $x'y'$ на рис. 4.36 повернута относительно исходной системы координат x, y таким образом, что ось x' является нормалью к плоскости среза сопла. Координаты отнесены к r_a — радиусу сопла в поперечном сечении, проходящем через тупую кромку сопла (точка A). Для сравнения штрихами нанесены результаты расчета осесимметричных струй с параметрами на соответствующей кромке сопла. Различие сплошных и штриховых линий отражает влияние косого среза.

Отметим, что в плоскости, проходящей через ось сопла и перпендикулярной плоскости симметрии, влияние косого среза проявляется в меньшей степени, чем в плоскости симметрии.

Пунктиром на рис. 4.36 показано положение линий постоянного числа Маха для сопла с косым срезом при $M_a=4{,}5$ и остальных условиях, как у сопла с $M_a=1{,}5$. Значки относятся к соответствующим осесимметричным соплам. Отличие от осесимметричных струй падает с увеличением числа Маха на срезе сопла.

В работе [49] сделана попытка учесть влияние косого среза на распределение плотности в струе, истекающей в вакуум. В соответствии с этой работой наряду со струей, истекающей из сопла с косым срезом, рассмотрим струю, истекающую из осесимметричного сопла, которое в плоскости xz совпадает с соплом с косым срезом. Числом Маха на кромке сопла (в точке C, см. рис. 4.35) обозначим через M_c, а радиус сопла — через r_c. Сопоставление этих струй показывает, что:

струи имеют практически одинаковую осевую составляющую полного импульса $\mathcal{J}_x$;

полный импульс пространственной струи имеет направленную вдоль оси y боковую составляющую $\mathcal{J}_y \approx \mathcal{J}_x \operatorname{tg}\psi(1+\gamma_a M_c^2)^{-1}$;

наибольшее различие струй наблюдается в плоскости xy а в плоскости xz оно незначительно;

при $\theta_a \neq 0$ числа Маха в разных точках кромки сопла с косым срезом различны, это оказывает возрастающее влияние на различие струй при удалении от оси сопла и при увеличении θ_a.

Характерный угол наклона в осесимметричной недорасширенной струе определяется в работе [49] через отношение поперечного R_2 и продольного R_1 характерных размеров. Согласно соотношению (2.19) $R_2/R_1=(1-\mathcal{J}_1)^{1/2}$, где $\mathcal{J}_1=\mathcal{J}_x/G_a W_{\max}$ приближенно можно вычислить по формуле (2.21), справедливой для сопла с равномерным потоком на выходе ($\theta_a=0$), положив в (2.21) $M_a=M_c$.

С учетом сказанного в работе [49] сделано предположение, что влияние косого среза на достаточном удалении от сопла описывается формулой

$$\ln(\varrho_2/\varrho_1)=\mathcal{J}_2 f(\eta, \nu)\cos\varphi, \qquad (4.9)$$

где

$$\mathcal{I}_2=\mathcal{I}_y/(\mathcal{I}_x\sqrt{1-\mathcal{I}_1});\quad \eta=r/(x\sqrt{1-\mathcal{I}_1});\quad \nu=\operatorname{tg}\theta_a/\sqrt{1-\mathcal{I}_1};$$

ϱ_2, ϱ_1 — плотности газа в точке (x, r, φ) соответственно пространственной и осесимметричной струй; $f(\eta, \nu)$ — некоторая функция, подлежащая определению.

Расчеты, проведенные в диапазоне определяющих параметров $\gamma_a=1{,}15\ldots1{,}4$; $M_c=2{,}5\ldots5$; $\theta_a=0\ldots10°$: $\psi=0\ldots40°$, показывают, что формула (4.9) удовлетворительно описывает влияние косого среза в области $I_2\lesssim0{,}2$, $\eta\lesssim30$, $\nu\lesssim0{,}6$. Функция $f(\eta, \nu)$ получена из сравнения распределений плотности пространственных и осесимметричных струй в сечении $x/r_c=160$, слабо зависит от угла θ_a и с хорошей точностью может быть аппроксимирована выражением $f=1{,}85\eta-0{,}75\eta^2+0{,}1\eta^3$.

Величина $\mathcal{I}_2$, характеризующая степень влияния косого среза, уменьшается с ростом числа Маха на кромке сопла, и течение в пространственной струе приближается к осесимметричному.

Из результатов расчетов следует, что на достаточном удалении от сопла $(x/r_c\geqslant40)$ формула (4.9) с хорошей точностью учитывает влияние косого среза.

В области $\eta>3$ зависимость (4.9) нарушается. Плотность газа здесь значительно ниже, чем на оси x, и может быть оценена (с точностью $\delta\rho/\rho\simeq\mathcal{I}_2$) по осесимметричной струе, соответствующей ближайшей точке на кромке сопла.

Рассмотрим влияние косого среза выходного сечения сопла на характеристики недорасширенной затопленной струи, следуя результатам [45]. С помощью разностной схемы сквозного счета Мак-Кормака авторами этой работы проведено численное исследование влияния угла среза на форму границы струи, висячего скачка уплотнения и распределение параметров.

Как и при истечении струи в вакуум, влияние косого среза в наибольшей степени проявляется в плоскости симметрии. На рис. 4.37 построена геометрия пространственной струи в плоскости симметрии течения для следующих условий: $M_a=2{,}19$, $\gamma_a=1{,}4$, $\theta_a=6°$, $n_a=5{,}5$, $\psi=40°$. Число Маха и степень нерасчетности соответствуют тупой кромке сопла (точка A на рис. 4.35). Заметим, что для конического сопла с косым срезом степень нерасчетности переменна и достигает своего максимального значения в точке A. Положение границы струи (кривые 1) определялось непосредст-

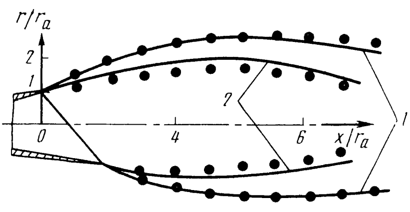


Рис. 4.37. Влияние косого среза сопла на геометрию недорасширенной струи в плоскости симметрии (условия указаны в тексте):

1 — висячий скачок, 2 — граница струи, ● — эксперимент

венно в процессе расчета, а положение висячего скачка уплотнения (кривые 2), который размазывался аппроксимационной вязкостью разностной схемы, находилось путем плавного соединения точек поперечных сечений плоскости симметрии, в которых наблюдается максимальный градиент в распределении давления. Экспериментальные значения (значки) координат границы струи и висячего скачка определены по теневой фотографии струи.

Влияние косого среза проявляется в различной кривизне следов границы струи, сходящих с острой и тупой кромок сопла, и приводит к развороту всей струи в направлении срезанной части сопла.

Анализ пространственной картины течения показал, что в сечениях, перпендикулярных оси сопла, след границы струи и висячего скачка все более приближается к эллипсу по мере удаления от сопла. При больших степенях нерасчетности, когда длина струи до диска Маха значительна, эллипс трансформируется в окружность, центр которой не лежит на оси сопла.

Интересно сравнить параметры течения в радиальных сечениях пространственной струи с параметрами течения осесимметричных струй, имеющих такие же параметры в выходном сечении сопла, как и пространственная струя.

На рис. 4.38 дано сопоставление геометрии струй в плоскости симметрии течения (*а*) (M_a=2,19, n_a=5,5) и в плоскости $\varphi=\pi/2$, перпендикулярной плоскости симметрии (*б*) (M=2,37, n=3,67) при γ_a=1,4, θ_a=6° и ψ=40°. Следы границы и висячего скачка уплотнения пространственной струи указаны кривыми *1*, а соответствующих осесимметричных струй — кривыми *2*. На этом рисунке сравниваются также профили статического давления, отнесенного к давлению торможения потока в выходном сечении сопла.

Видно, что в радиальной плоскости $\varphi=\pi/2$ форма висячего скачка и границы пространственной и осесимметричной струй с числом Маха и степенью нерасчетности, соответствующими этой плоскости, отличаются меньше, чем в плоскости симметрии.

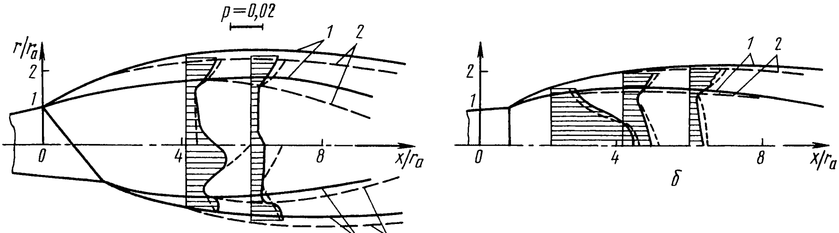


Рис. 4.38. Сравнение геометрии и профилей безразмерного давления пространственной и осесимметричных струй (условия и обозначения указаны в тексте):
а — плоскость симметрии; *б* — плоскость $\varphi=\pi/2$

При углах $\psi<30°$ можно говорить о частичном совпадении границ струй в этой плоскости.

На пространственный характер течения помимо угла ψ существенное влияние оказывает число M_a на тупой кромке сопла. При $M_a \geqslant 2{,}5$ угол поворота струи в плоскости симметрии мал ($\sim 3°$ при $\psi=50°$) и с возрастанием числа Маха падает. При этом геометрия струи в радиальной плоскости $\varphi=\pi/2$ удовлетворительно совпадает с геометрией соответствующей осесимметричной струи. С уменьшением числа M_a влияние угла среза ψ на угол поворота струи усиливается, а радиальная плоскость, в которой струя аналогична по геометрии осесимметричной, все более смещается от расчетной плоскости $\varphi=\pi/2$ по мере удаления от выходного сечения сопла.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Абрамович Г. Н.** Прикладная газовая динамика. М.: Наука, 1976. 888 с.

2. **Анцупов А. В.** Исследование параметров нерасчетной сверхзвуковой струи газа //ЖТФ, 1974. Т. 14, вып. 3. С. 372—379.

3. **Ашратов Э. А., Волконская Т. Г.** Исследование параметров осесимметричных недорасширенных струй идеального газа // Вычислительные методы и программирование. Вып. XV. Изд-во МГУ, 1970. С. 92—101.

4. **Ашратов Э. А., Волконская Т. Г.** О влиянии начальной неравномерности потока на срезе сопла на характеристики сверхзвуковых струй //Численные методы в аэродинамике. Вып. 2. Изд-во МГУ, 1977. С. 19—27.

5.. **Ашратов Э. А., Дубинская Н. В.** Исследование течений в соплах при наличии колебательной релаксации //Вычислительные методы и программирование. Вып. 27. Изд-во МГУ, 1977. С. 96—115.

6. **Благосклонов В. И., Гилинский М. М., Стасенко А. Л.** Численное исследование двухфазных стационарных сверхзвуковых течений в соплах и струях, истекающих в затопленное пространство или спутный поток // Струйные и отрывные течения. Изд-во МГУ, 1979. С. 95—105.

7. **Бондарев Е. Н., Гущин Г. А.** Некоторые особенности распространения пространственных вязких струй // Изв. АН СССР. Сер. МЖГ, 1974, № 5. С. 122—128.

8. **Бондарев Е. Н., Гущин Г. А.** Пространственное взаимодействие струй, распространяющихся в спутном сверхзвуковом потоке // Иза. АН СССР. Сер. МЖГ, 1972, № 6. С. 88—93.

9. **Бондарев Е. Н.** Динамика вязких сверхзвуковых нерасчетных струй. Изд. МАИ, 1983. 70 с.

10. **Борисов Н. Ф.** Численный расчет неизобарических сверхзвуковых вязких струй, истекающих в спутный сверхзвуковой поток // Учен. зап. ЦАГИ, 1985, № 1. С. 15—26.

11. **Борисов Н. Ф., Сыровой В. А.** Об уравнениях вязких сверхзвуковых струй с большой степенью нерасчетности // Изв. АН СССР, сер. МЖГ, 1977, № 2. С. 137—147.

12. **Васильков А. П., Мурзинов И. Н.** Подобие при истечении сильно недорасширенных струй в спутный гиперзвуковой поток // Изв. АН СССР, сер. МЖГ, № 5, 1974. С. 129—135.

13. **Влияние** вязкости на течение в начальном участке сильно недорасширенной струи / В. С. Авдуевский, А. В. Иванов, И. М. Карпман и др. ДАН СССР, 1971, № 1. С. 46—49.

14. **Гиневский А. С.** Теория турбулентных струй. М.: Машиностроение, 1969, 400 с.

15. **Дулов В. Г., Лукьянов Г. А.** Газодинамика процессов истечения. Новосибирск, Наука, 1984, 234 с.

16. **Дьяконов Ю. Н., Усков В. И.** Расчет сверхзвуковых струй идеального газа методом сеток // Тр. института механики МГУ, 1970, № 5. С. 73—87.

17. **Дэш Л. М., Уилмот Р. Г., Пергамент Х. С.** Способ расчета развития слоя смешения в ближнем поле струи // Ракетная техника и космонавтика. Т. 17, № 9, 1979. С. 22—37.

18. **Зак Л. И.** Гиперзвуковая струя, истекающая в покоящуюся среду или спутный сверхзвуковой поток / / Изв. АН СССР, сер. МЖГ, 1969, № 5. С. 72—76.

19. **Иванов М. Я., Киреев В. И.** К расчету сильно недорасширенных сверхзвуковых затопленных струй // ЖВМ и МФ, 1976. Т. 16, № 3. С. 750—757.

20. **Иванов М. Я., Крайко А. Н., Назаров В. П.** Некоторые результаты численного исследования нерасчетных пространственных струй идеального газа // Изв. АН СССР. Сер. МЖГ, 1972, № 4. С. 102—109.

21. **Иванов М. Я., Ланюк А. Н.** К расчету сверхзвуковой перерасширенной струи идеального газа при наличии в потоке диска Маха. Учен. зап. ЦАГИ, 1973, № 4. С. 21—26.

22. **Иванов А. В., Станкус Н. В., Чекмарев С. Ф.** О гиперзвуковой многоцикловой струе газа с сильным недорасширением потока на срезе сопла // Изв. АН СССР, сер. МЖГ, 1984, № 6. С. 27—35.

23. **Исследование** закономерностей развития в системе вязких недорасширенных сверхзвуковых струй / В. С. Авдуевский, А. В. Иванов, И. М. Карпман и др. — ДАН СССР, 1974. Т. 216, № 5. С. 1004—1007.

24. **Исследование** нерасчетных режимов осесимметричного кольцевого сопла с центральным телом / Ф. А. Виленский, Т. Г. Волконская, В. П. Грязков, У. Г. Пирумов // Изв. АН СССР. Сер. МЖГ, 1972. № 4.

25. **Исследование** сверхзвуковых течений в струях / Э. А. Ашратов, Т. Г. Волконская, Г. С. Росляков и др. // Некоторые применения метода сеток в газовой динамике, 1974, Вып. VI. С. 241—408.

26. **Камзолов В. Н., Маслов В. И., Пирумов У. Г.** Исследование траекторий частиц в соплах Лапиталя / Изв. АН СССР. Сер. МЖГ, 1971, № 5. С. 136—143.

27. **Карпман И. М., Трасковский В. Д.** Экспериментальное исследование течения в слое смешения начального участка спутной недорасширенной струи // Изв. АН СССР, сер. МЖГ, 1981, № 1. С. 161—164.

28. **Киреев В. И., Пирумов У. Г.** Расчет стационарных сверхзвуковых течений с неравномерными химическими реакциями // ЖВМ и МФ, 1980. Т. 20, № 1. С. 182—190.

29. **Кисляков Н. И., Ребров А. К., Шарафутдинов Р. Г.** О структуре высоконапорных струй низкой плотности за сверхзвуковым соплом // ПМТФ, 1975, № 2. С. 42—52.

30. **Клайнберг Д. М., Кубота Т., Лиз Л.** Теория взаимодействия выхлопной струи с пограничным слоем при сверхзвуковых скоростях // Ракетная техника и космонавтика, 1972. Т. 10, № 5. С. 25—434.

31. **Ковалев Б. Д., Мышенков В. И.** Расчет вязкой сверхзвуковой струи, истекающей в затопленное пространство // Учен. зап. ЦАГИ, 1978. Т. IX, № 2. С. 9—18.

32. **Ковалев Б. Д., Мышенков В. И.** Расчет вязкой сверхзвуковой струи истекающей в спутный поток // Учен. зап. ЦАГИ, 1978. Т. IX, № 3. С. 125—130.

33. **Копченов В. И.** Метод численного решения задачи о распространении сверхзвуковой недорасширенной турбулентной струи в спутном сверхзвуковом потоке // Учен. зап. ЦАГИ, 1980. Т. 11, 1, № 4. С. 37—45.

34. **Липницкий Ю. М., Минин С. Н., Родионов А. В.** О влиянии колебательной релаксации на параметры сверхзвуковых струй газа, истекающих в вакуум // Письма в ЖТФ, 1984. Т. 10. Вып. 21. С. 1301—1304.

35. **Лунев В. В.** Гиперзвуковая аэродинамика. М.: Машиностроение, 1975. 327 с.

36. **Мунц Е., Хеймел Б., Мэгайр Б.** Некоторые особенности процесса разрежения факела выхлопных газов // Ракетная техника и космонавтика. 1970. Т. 8, № 9. С. 141—150.

37. **Мурзинов И. Н.** Параметры подобия при истечении недорасширенных струй в затопленное пространство // Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, 1971, № 4. С. 141—149.

38. **Мышенков В. И.** Расчет течения вязкой ламинарной струи в спутном потоке // ЖВМ и МФ. 1979. Т. 19, № 2. С. 485—494.

39. **Немченко В. И.** Исследование замыкающего скачка в сверхзвуковой недорасширенной струе газа // ИФЖ, 1971. С. 909—917.

40. **Нецветайлов Е. М., Стасенко А. Л.** Численное исследование динамики частиц в сопле и затопленной струе с учетом их излучения и затвердевания // Труды ЦАГИ, 1978. Вып. 1928. С. 3—11.

41. **Нецветайлов Е. Н., Стасенко А. Л.** Численное исследование частиц в газовых струях с учетом поверхности фазовых переходов и гомогенной конденсации // Тр. ЦАГИ. Вып. 6. 1928, 1978. С. 12 — 32.

42. **О некоторых** математических моделях течения смеси с однородными частицами в сверхзвуковой струе / И. П. Гинзбург, Т. Н. Рябинина, Л. И. Шуб, В. А. Коробков //Физика горения и взрыва, 1974. Т. 10, № 1. С. 56—65.

43. **Пирс В. Э., Дэш С. Н.** Использование параметров изобарического течения начального участка выхлопной струи для расчета излучения от факела ракетного двигателя на малых высотах // Ракетная техника и космонавтика, 1979. Т. 17, № 8. С. 140—142.

44. **Пирумов У. Г., Росляков Г. С.** Течения газа в соплах. Изд. МГУ, 1978, 352 с.

45. **Погорелов В. И., Щербанина Г. Б.** Особенности истечения сверхзвуковой струи из сопла с косым срезом / / Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, 1977, № 4. С. 105—110.

46. **Ребров А. К., Чекмарев С. Ф., Шарафутдинов Р. Г.** Влияние разреженности на структуру свободной струи азота //ПМТФ, 1971, № 1. С. 136—141.

47. **Расчет** истекающих в вакуум химически неравновесных струй газа / А. С. Войновский, В. И. Киреев, Ю. М. Липницкий, А. В. Родионов // ЖВМ и МФ, 1984. Т. 24, № 9. С. 1423—1428.

48. **Родионов А. В.** Расчет истечения сверхзвуковой струи газа в вакуум из сопла с косым срезом // Изв. АН СССР. Сер. МЖГ, 1982, № 3. С. 185—186.

49. **Родионов А. В.** Распределение плотности в сверхзвуковой струе, истекающей в вакуум из сопла с косым срезом // Изв. АН СССР. Сер. МЖГ, 1983, № 6. С. 179—180.

50. **Рускол В. А., Пирумов У. Г.** Изобарическая турбулентная реагирующая струя, истекающая в спутный поток // ДАН СССР, 1977. Т. 236. С. 231—325.

51. **Рычков А. Д.** Течение смеси газа и твердых частиц в сверхзвуковых недорасширенных струях // Изв. АН СССР. Сер. МЖГ, 1974, № 2. С. 75—79.

52. **Сверхзвуковые** струи идеального газа / Г. И. Аверенкова, Э. А. Ашратов, Т. Г. Волконская и др. В 2-х ч. М., Изд-во МГУ, 1970—1971. Ч. I. 379 с. Ч. II. 170 с.

53. **Сверхзвуковые** течения газа в конических соплах / Н. В. Дроздова, У. Г. Пирумов, Г. С. Росляков, В. П. Сухоруков // Некоторые применения метода сеток в газовой динамике. Изд-во МГУ, 1974. Вып. VI. С. 125—249.

54. **Сверхзвуковые** неизобарические струи газа / В. С. Авдуевский, Э. А. Ашратов, А. В. Иванов, У. Г. Пирумов. М.: Машиностроение, 1985. 248 с.

55. **Стасенко А. Л.** Газодисперсные течения в аэродинамике и летательной технике // Труды ЦАГИ, 1982. Вып. 2138. 48 с.

56. **Структура** турбулентных недорасширенных струй, вытекающих в затопленное пространство и спутный поток / В. С. Авдуевский, А. В. Иванов, И. М. Карпман и др. // Изв. АН СССР. Сер. МЖГ, 1972, № 3. С. 15—29.

57. **Струи** низкой плотности за звуковым соплом при больших перепадах давлений / В. В. Волчков, А. В. Иванов, Н. И. Кисляков и др. // Изв. АН СССР. Сер. МЖГ, 1973, № 2. С. 64—73.

58. **Теория** турбулентных струй / Г. Н. Абрамович, Т. А. Гиршович, С. Ю. Крашенинников и др. М.: Наука, 1984. С. 716.

59. **Течение** в сверхзвуковой вязкой недорасширенной струе / В. С. Авдуевский, А. В. Иванов, И. М. Карпман и др. // Изв. АН СССР, сер. МЖГ, 1970, № 3. С. 63—69.

60. **Турбулентные** течения реагирующих газов / Под ред. П. Либби, Ф. Вильямса. М.: Мир, 1983, 325 с.

61. **Филатов В. В.** Определение структуры сверхзвуковой перерасширенной струи на начальном участке // Гидроаэромеханика и теория упругости. Вып. 13. Днепропетровск: 1971. С. 3—11.

62. **Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф.** Теория гиперзвуковых течений. М.: ИЛ, 1962, 608 с.

63. **Храмов Г. А., Чекмарев С. Ф.** Подобие истечения сильно недорасширенной струи газа в спутный гиперзвуковой поток // Изв. АН СССР, сер. МЖГ, 1982, № 4. С. 113—130.

64. **Чекмарев С. Ф., Сковородко П. А.** Маршевый метод расчета двумерных сверхзвуковых течений вязкого газа в естественных координатах // ИТФ СО АН СССР № 71—81. Новосибирск: 1981. 28 с.

65. **Черный Г. Г.** Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.

66. **Чжен П.** Отрывные течения. М.: Мир, 1973. Т. 2. 280 с.

67. **Численное** решение многомерных задач газовой динамики / С. К. Годунов, А. В. Забродин, М. Я. Иванов и др. М.: Наука, 1976. 400 с.

68. **Швец А. И.** Сверхзвуковая кольцевая струя // Журнал прикладной механики и технической физики, 1975, № 2. С. 59—69.

69. **Экспериментальное** исследование течения в пространственной вязкой недорасширенной струе / В. С. Авдуевский, А. В. Иванов, И. М. Карпман и др. // Изв. АН СССР. Сер. МЖГ, 1974, № 5. С. 21—26.

70. **Экспериментальные** методы в динамике разреженных газов // Под ред. С. С. Кутателадзе. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1974. 218 с.

71. **Boynton F. P., Thomson A.** Numerical computation of steady, supersonic two-dimensional gas flow in natural coordinates // Journal of Computational Physics, 1969, v. 3, № 3. P. 379—398.

72. **Chu C. W., Niemann A. F.,** Powenrs S. A. Calculation of multiple rocket engine exhaust plume by method of characteristics // AIAA Paper № 66—651, 1966. P. 1—25.

73. **Dash S. M., Pergament H. S.** A Computational System for the Analysis of Mixing Chemical Shock procesies in Supersonic Intérnal and Exhaust Plume Flowfields // AIAA Paper 80—1255, 1980, 25 p.

74. **Lau J. C., Morris P. J., Fisher M. J.** Measurements in subsonic and supersonic free jets using a Raper velocimeter // Journal of Fluid Mechanics, 1979, V. 93, part I, № 1. P. 1—27.

ОГЛАВЛЕНИЕ